O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Am Anfang waren n positive ganze Zahlen. Für jedes Paar (a, b) dieser Zahlen schrieb Boris deren arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ auf eine Tafel (Blackboard) und deren geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$ auf eine Weißwandtafel (Whiteboard). Es stellte sich heraus, dass für jedes Paar mindestens eins dieser Mittel eine ganze Zahl war. Beweise, dass auf mindestens einer der beiden Tafeln ausschließlich ganze Zahlen stehen.

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Baron Münchhausen präsentiert einen neuen Satz: Wenn ein Polynom $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ Nullstellen bei n positiven ganzen Zahlen hat, dann gibt es a Geraden in der Ebene, so dass diese genau b Schnittpunkte haben. Ist der Satz des Barons richtig?

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Zwei Kreise α und β mit jeweiligen Mittelpunkten A und B schneiden sich in den Punkten C und D. Die Strecke AB schneide α und β jeweils in den Punkten K und L. Der Strahl DK schneide den Kreis β das zweite Mal im Punkt N und der Strahl DL schneide den Kreis α das zweite Mal im Punkt M. Beweise, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $KLMN$ mit dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Es gibt zwei runde Tische, an denen jeweils n Zwerge sitzen. Jeder Zwerg hat nur zwei Freunde: seinen linken und seinen rechten Nachbarn. Ein guter Zauberer will alle Zwerge an einen runden Tisch setzen, so dass zwei Nachbarn immer Freunde sind. Sein Zauber ermöglicht es ihm, beliebige $2n$ Paare von Zwergen in Paare von Freunden zu verwandeln. Allerdings weiß er, dass ein böser Hexer n dieser neuen Freundschaften aufbrechen kann. Für welches n kann der gute Zauberer sein Ziel unabhängig davon erreichen, was der böse Hexer tut?

Aufgabe 5 (7 P.)**.** Gibt es ein Rechteck, das man in 100 Rechtecke zerteilen kann, so dass alle zum ursprünglichen ähnlich sind, aber keine zwei Rechtecke kongruent sind?

Aufgabe 6 (10 P.)**.** Alice und Bob spielen das folgende Spiel. Sie schreiben wie folgt einige Brüche $1/n$ mit positiven ganzen Zahlen n an die Tafel. Den ersten Zug macht Alice. Alice schreibt nur einen Bruch in jedem ihrer Züge, während Bob einen Bruch im ersten Zug schreibt, zwei Brüche im zweiten Zug, drei im dritten usw. Bob möchte erreichen, dass die Summe aller Brüche an der Tafel nach irgendeinem Zug eine ganze Zahl ist. Kann Alice dies verhindern?

Aufgabe 7 (12 P.)**.** Ein weißer Käfer sitzt im Eckfeld eines $1000 \times n$-Schachbretts, wobei n eine ungerade positive ganze Zahl mit $n > 2020$ ist. In den zwei nächsten Eckfeldern stehen zwei schwarze Läufer (Schachfiguren, die beliebig weit diagonal ziehen dürfen). In jedem Zug bewegt sich der Käfer auf ein horizontales oder vertikales Nachbarfeld oder zieht wie ein Springer (Schachfigur, die ein Feld horizontal oder vertikal und zusätzlich eins diagonal vorwärts zieht und dabei andere Figuren überspringen darf). Der Käfer möchte das gegenüberliegende Eckfeld erreichen, ohne die Felder zu betreten, die von einem Läufer besetzt oder bedroht werden (letzteres heißt, dass der Läufer dorthin ziehen könnte), und dabei auf dem Weg jedes der übrigen Felder genau einmal betreten. Zeige, dass die Anzahl an Wegen, auf denen der Käfer sein Ziel erreichen kann, nicht von n abhängt.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!