

## M Mittelstufe

**Aufgabe 1** (4 P.). Die Quadrumland-Karte ist ein  $6 \times 6$ -Quadrat, in dem jede quadratische Zelle entweder ein Königreich oder umstrittenes Gebiet ist. Es gibt 27 Königreiche und 9 umstrittene Gebiete. Jedes umstrittene Gebiet wird genau von den Königreichen beansprucht, die benachbart sind, also über eine Kante oder Ecke mit dem jeweiligen Gebiet verbunden sind. Ist es möglich, dass für jedes umstrittene Gebiet die Anzahl der Ansprüche (auf das jeweilige Gebiet) anders ist als bei allen anderen umstrittenen Gebieten?

**Aufgabe 2** (4 P.). Was ist die größtmögliche Anzahl an unterschiedlichen ganzen Zahlen in einer Reihe, so dass jeweils die Summe von 11 aufeinanderfolgenden Zahlen entweder 100 oder 101 ist?

**Aufgabe 3** (4 P.). Sei  $ABCD$  ein Rhombus und  $APQC$  ein Parallelogramm, für das der Punkt  $B$  im Inneren liegt und die Seite  $AP$  gleichlang wie eine Seite des Rhombus ist. Beweise, dass  $B$  der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $\triangle DPQ$  sein muss.

**Aufgabe 4** (5 P.). Die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$  habe für eine ganze Zahl  $n$  eine ganzzahlige Lösung  $x, y, z$  (alle Zahlen sind ganze Zahlen). Beweise, dass dann die Gleichung  $x^2 + y^2 - xy = n$  ebenfalls eine ganzzahlige Lösung  $x, y$  hat.

**Aufgabe 5** (5 P.). Auf einem  $8 \times 8$ -Schachbrett stehen zwei gleiche Steine auf den Feldern a1 und c3. Alice und Bob ziehen abwechselnd auf folgende Weise (wobei Alice beginnt): Ein Spieler wählt einen Stein und bewegt ihn beliebig viele Felder horizontal nach rechts oder vertikal nach oben. Das Ziel jedes Spielers ist es, das Feld h8 zu erreichen. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie, unabhängig davon, was der Gegner macht? (Zu jeder Zeit darf es nur einen Stein auf einem Feld geben und die Steine dürfen sich nicht überspringen.)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   | ○ |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | ○ |   |   |   |   |   |   |   |
|   | a | b | c | d | e | f | g | h |

---

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!

