O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Pete markiert mehrere Punkte (mehr als zwei) in der Ebene, so dass alle Abstände zwischen ihnen verschieden sind. Ein Paar (A, B) von Punkten heißt *ungewöhnlich*, wenn A der am weitesten von B entfernte Punkt ist und B der am nächsten an A gelegene Punkt (abgesehen von A selbst). Welches ist die größte Zahl an ungewöhnlichen Paaren, die Pete erhalten kann?

Aufgabe 2 (4 P.). Gegeben seien positive Zahlen a, b, c, d kleiner als 1. Zeige: Ist $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, dann gilt

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

Aufgabe 3 (5 P.). Im Dreieck $\triangle ABC$ seien A_1, B_1 und C_1 die Fußpunkte der Höhen durch die Ecken A, B und C. Die Punkte C_A und C_B seien die Projektionen von C_1 auf AC beziehungsweise BC. Zeige, dass die Gerade C_AC_B die Strecken C_1A_1 und C_1B_1 jeweils in deren Mitte schneidet.

Aufgabe 4. Existiert ein konvexes N-Eck, für welches alle Seiten gleich lang sind und alle Ecken auf der Parabel $y = x^2$ liegen, falls

(a) (3 P.) $N = 2011$;

(b) (4 P.) $N = 2012$?

Aufgabe 5 (7 P.). Wir nennen eine positive ganze Zahl *gut*, wenn sie keine Null als Ziffer hat. Eine gute Zahl heißt *besonders*, falls sie mindestens k Ziffern hat und jede Ziffer größer als die vorhergehende (von links nach rechts gesehen) ist. Eine gute Zahl können wir nun wie folgt verändern: In jedem Schritt wählen wir eine besondere Zahl und fügen diese entweder links, rechts oder zwischen zwei Ziffern zur Dezimaldarstellung der aktuellen Zahl hinzu oder löschen sie aus der Dezimaldarstellung, falls sie darin vorkommt. Was ist das größte k, für welches man auf diese Weise jede gute Zahl in jede andere gute Zahl umwandeln kann?

Aufgabe 6 (7 P.). Zeige, dass für $n > 1$ die Zahl $1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ ein Vielfaches von 2^n aber nicht von 2^{n+1} ist.

Aufgabe 7 (9 P.). Ein blauer Kreis wird durch 100 rote Punkte in 100 Kreisbögen unterteilt. Die Längen dieser Bögen sind genau die ganzen Zahlen von 1 bis 100, nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Zeige, dass es stets zwei Sehnen mit roten Endpunkten gibt, die senkrecht aufeinander stehen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!