Städtewettbewerb Herbst 2006 Lösungsvorschläge

Hamburg

16. November 2006 [Version 13. Januar 2007]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.). Einem regelmäßigen 7-Eck und einem regelmäßigen 17-Eck seien die Inkreise ein- und die Umkreise umbeschrieben. Wenn beide Kreisringe den gleichen Flächeninhalt haben, warum haben dann das 7-Eck und das 17-Eck die gleichen Kantenlängen?

LÖSUNG. Die Kantenlänge des Siebenecks, der Radius des Inkreises und der Radius des Umkreises seien mit L_7, r_7 und R_7 bezeichnet. Für das Siebzehneck seien die Bezeichnungen analog als L_{17}, r_{17} und R_{17} gewählt. Aufgrund der Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} & \pi R_7^2 - \pi r_7^2 = \pi R_{17}^2 - \pi r_{17}^2 \\ \Rightarrow \qquad & R_7^2 - r_7^2 = R_{17}^2 - r_{17}^2. \end{aligned}$$

Für jedes der beiden Polygone bilden eine beliebige Ecke, der Mittelpunkt einer dazu benachbarten Kante und der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kreise ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kantenlängen $\frac{L_i}{2}$, r_i und R_i $(i = 7, 17)$. Nach Pythagoras folgt also

$$L_7 = 2\frac{L_7}{2} = 2\sqrt{R_7^2 - r_7^2} = 2\sqrt{R_{17}^2 - r_{17}^2} = 2\frac{L_{17}}{2} = L_{17}.$$

□

Aufgabe M.2 (5 P.). Als Ann ihren neuen Job antritt, wird ihr als erstes mitgeteilt, welche Arbeitskollegen sich gegenseitig kennen. Um sich dies zu merken, fertigt sie sich folgendes Schema an. Sie zeichnet einen großen Kreis und repräsentiert jeden Mitarbeiter durch eine Sehne, wobei sich die Sehnen genau dann schneiden, wenn sich die zugehörigen Mitarbeiter kennen. Ann ist sicher, dass sie auf diese Weise die Konstellation in jeder beliebigen Firma exakt abbilden kann. Hat Ann Recht? (Zwei Sehnen schneiden sich bereits, wenn sie von dem gleichen Punkt ausgehen.)

LÖSUNG. Ann hat Unrecht.

Sei eine Firma mit den Mitarbeitern a, b, c, d, e, f, g gegeben. Die Bekanntschaften seien wie folgt: a, b, c kennen sich untereinander nicht, d ist mit a, b und c bekannt, e mit a und b, f mit b und c sowie g mit a und c.

Wir nehmen an, es sei eine gewünschte Darstellung der Bekanntschaften gegeben. Die Sehnen a, b und c schneiden sich nicht. Ihre Endpunkte unterteilen den Kreisrand in sechs Bögen. Angenommen, es gibt zu jeder Sehne a, b, c einen Bogen, dessen Enden Endpunkte dieser Sehne sind (siehe Abbildung 1). Dann hat jede Sehne, die a trifft, einen Endpunkt im zu a gehörigen Bogen, ebenso für b und c. In diesem Fall kann d daher nicht alle drei Sehnen treffen, Widerspruch. Also ist dies für eine Sehne nicht der Fall, etwa für b (siehe Abbildung 1). Dann trifft jedoch jede Sehne, die a und c trifft, auch b, weswegen die Sehne g nicht korrekt gezeichnet sein kann. Somit gibt es für diese Firma keine Darstellung der gewünschten Art. □

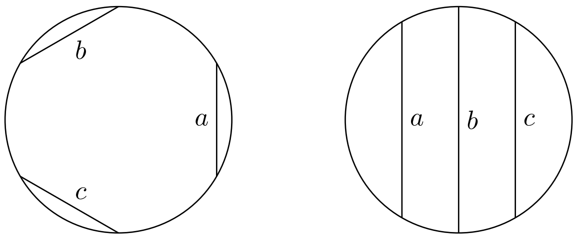

Abbildung 1: Die möglichen Anordnungen der Sehnen a, b, c in der Lösung von Aufgabe M.2. Gibt es für jede Sehne einen Bogen, dessen Endpunkte die Endpunkte dieser Sehne sind, so ist die Anordnung wie auf dem linken Bild, andernfalls ist sie wie auf dem rechten Bild.

Aufgabe M.3. In einem 3×3-Quadrat sind neun Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ eingetragen und zwar stehen (in genau dieser Reihenfolge) a, b, c in der ersten Zeile, d, e, f in der zweiten und g, h, i in der dritten Zeile. Das Quadrat ist magisch, d.h. die Summen jeder Zeile und jeder Spalte, sowie die jeder Diagonalen sind gleich. Zeige

(a) (3 P.) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

(b) (3 P.) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

LÖSUNG.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

(a) Sei S die Summe jeder Zeile, Spalte oder Diagonalen. Betrachtet man die mittlere Zeile und Spalte sowie die beiden Diagonalen, so ergibt sich

$$S - e = a + i = b + h = c + g = d + f.$$

Summiert man die beiden äußeren Zeilen und Spalten, so erhält man

$$\begin{aligned} 4S &= (a + b + c) + (g + h + i) + (a + d + g) + (c + f + i) \\ &= 2(a + i) + (b + h) + 2(c + g) + (d + f) = 6S - 6e. \end{aligned}$$

Es ist daher $S = 3e$ und somit

$$a + i = b + h = c + g = d + f = 2e. \tag{1}$$

Hieraus folgt direkt

$$2(a + c + g + i) = 8e = b + d + f + h + 4e.$$

(b) Aus $S = 3e$ sowie der ersten Zeile und Spalte folgt

$$\begin{aligned} & b = 3e - a - c, && (2)\\ & d = 3e - a - g \overset{(1)}{=} 3e - a - (2e - c) = e - a + c && (3)\\ \Rightarrow \quad & b + d = 4e - 2a. && (4) \end{aligned}$$

Es gilt mit (1)

$$\begin{aligned} 2\left(a^3 + c^3 + g^3 + i^3\right) \overset{(1)}{=} & 2\left(a^3 + c^3 + (2e - c)^3 + (2e - a)^3\right)\\ = & 2\left(a^3 + c^3 + 8e^3 - 12e^2c + 6ec^2 - c^3\right.\\ & \left. + 8e^3 - 12e^2a + 6ea^2 - a^3\right)\\ = & 32e^3 - 24e^2(a + c) + 12e(a^2 + c^2). \end{aligned}$$

Die andere Seite der zu beweisenden Gleichung berechnet sich mit (1) zu

$$\begin{aligned} b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 = & b^3 + d^3 + (2e - d)^3 + (2e - b)^3 + 4e^3\\ = & b^3 + d^3 + 8e^3 - 12e^2d + 6ed^2 - d^3\\ & + 8e^3 - 12e^2b + 6eb^2 - b^3 + 4e^3\\ = & 20e^3 - 12e^2(b + d) + 6e(b^2 + d^2). \end{aligned}$$

Mit (2)-(4) folgt weiter

$$\begin{aligned} b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 = & 20e^3 - 12e^2(4e - 2a)\\ & + 6e\left((3e - a - c)^2 + (e - a + c)^2\right)\\ = & -28e^3 + 24e^2a + 6e\left(9e^2 + a^2 + c^2 - 6ea\right.\\ & \left. - 6ec + 2ac + e^2 + a^2 + c^2 - 2ea + 2ec - 2ac\right)\\ = & 32e^3 - 24e^2(a + c) + 12e(a^2 + c^2)\\ = & 2\left(a^3 + c^3 + g^3 + i^3\right). \end{aligned}$$

□

Aufgabe M.4 (6 P.)**.** In einem spitzwinkligen Dreieck sei der Inkreis mit Radius R gezeichnet. Drei Tangenten an diesen Inkreis schneiden von dem Dreieck drei rechtwinklige Dreiecke ab. Damit wird das Ausgangsdreieck in ein Sechseck und drei Dreiecke zerlegt. Der Umfang des Sechsecks sei Q. Wie groß ist dann die Summe der Inkreisdurchmesser der drei rechtwinkligen Dreiecke?

Lösung. Die Summe der Inkreisdurchmesser der drei rechtwinkligen Dreiecke beträgt

$$Q - 6R.$$

Die Ecken des Dreiecks seien A, B und C und die Inkreisradien der rechtwinkligen Dreiecke bei A, B und C seien mit R_A, R_B bzw. R_C bezeichnet.

Wegen der Rechtwinkligkeit der abgeschnittenen Dreiecke findet sich der Inkreisradius R an den drei rechtwinkligen Ecken des Sechsecks wieder und liefert damit den Anteil $6R$ des Sechseckumfangs Q. Zu zeigen bleibt, dass an den drei anderen Ecken des Sechsecks je einer der drei Radien R_A, R_B, und R_C doppelt auftritt.

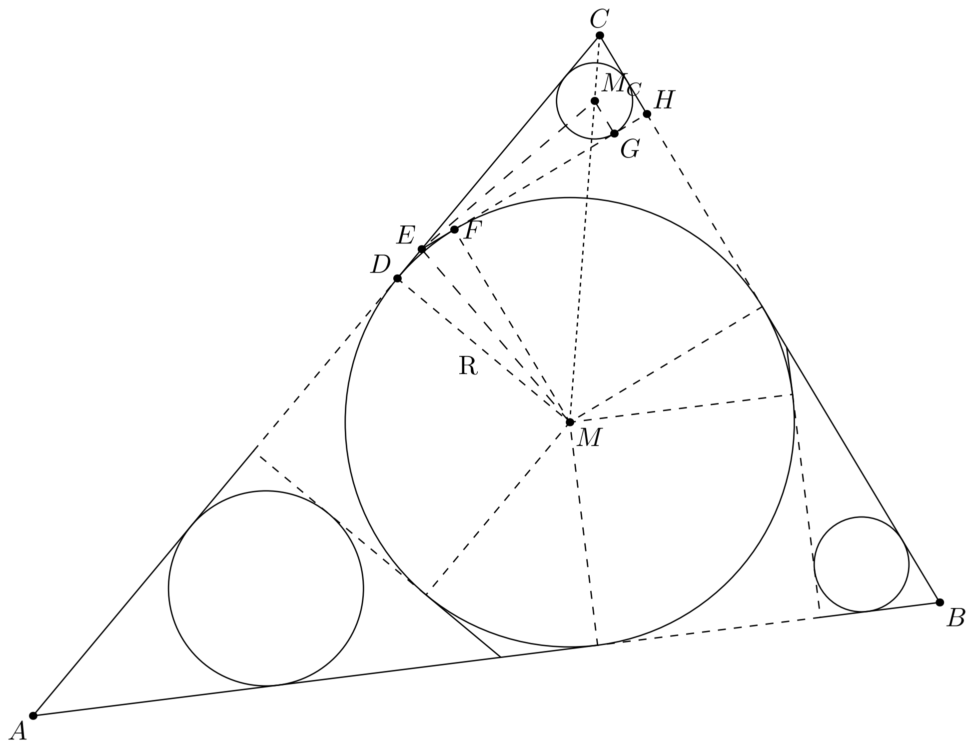

Abbildung 2: Skizze zur Lösung von Aufgabe M.4.

Diese Aussage wird nun stellvertretend am rechtwinkligen Dreieck bei C nachgewiesen, wo sich ergibt, dass bei einer Ecke des Sechsecks eine Strecke der Länge R_C doppelt auftritt. Für die anderen Ecken sind die Betrachtungen genau analog.

Es sei M der Inkreismittelpunkt von ΔABC und D der Lotfußpunkt auf AC. Das rechtwinklige Dreieck bei C sei ΔEHC mit E auf AC und H auf BC, wobei sich der rechte Winkel ohne Einschränkung bei H befinde. M_C sei der Inkreismittelpunkt dieses Dreiecks. F sei der Lotfußpunkt von M auf (die Tangente) EH und G der von M_C (vergleiche auch Abbildung 2).

Die beiden von E verlaufenden Tangentenstrecken $\overline{ED}$ und $\overline{EF}$ an den Inkreis sind gleich lang. Es wird nun gezeigt, dass sie gleich R_C sind.

Dazu wird die Kongruenz der beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔEMD und ΔM_CEG bewiesen.

- Die Hypotenusen $\overline{EM}$ und $\overline{M_CE}$ sind gleich lang, weil sie Katheten des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks ΔMM_CE sind, was jetzt gezeigt wird. Betrachtet man hierzu die Dreiecke ΔEM_CC und ΔEHC, so erhält man:

  $$\angle CM_CE = 180° - \frac{1}{2}\angle ECH - \frac{1}{2}\angle HEC = 90° + \frac{1}{2}\angle CHE = 135°,$$

  also $\angle EM_CM = 45°$.

  Wegen des rechten Winkels $\angle MEM_C$ ist $\angle M_CME = 45° = \angle EM_CM$ und damit das Dreieck wie behauptet gleichschenklig.

- Da $\angle MDC$ ein rechter Winkel ist, gilt $\angle M_C MD = \angle CMD = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$ und somit

$$\angle EMD = \angle M_C MD - \angle M_C ME = 45° - \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Und schließlich ist

$$\angle GEM_C = \frac{1}{2}\angle HEC = \frac{1}{2}(90° - \angle ACB) = 45° - \frac{1}{2}\angle ACB = \angle EMD.$$

Da wie behauptet die Dreiecke ΔEMD und $\Delta M_C EG$ kongruent sind, gilt $\left|\overline{EF}\right| = R_C$. □

Aufgabe M.5. Es soll ein quadratisches Bild mit der Seitenlänge 1 verpackt werden. Ein rechteckiger Bogen mit dem Flächeninhalt 2 heißt eine zulässige Verpackung, wenn sich damit das Bild ohne Zerschneidungen einpacken lässt. So ist z.B. ein 2×1-Bogen oder ein quadratischer Bogen mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$ zulässig.

(a) (4 P.) Zeige, dass es weitere zulässige Verpackungen gibt;

(b) (3 P.) Zeige, dass es unendlich viele zulässige Verpackungen gibt.

Lösung. Hier wird der Teil b gezeigt, welcher natürlich Teil a beinhaltet.

Wir behaupten, dass jeder Bogen der Größe $\frac{2}{\sqrt{4n^2+1}} \times \sqrt{4n^2+1}$ mit $n = 1, 2, \ldots$ eine zulässige Verpackung ist.

Sei $n \geq 1$ fest gewählt. Zunächst betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 und $\frac{1}{2n}$. Die Hypotenuse hat demnach Länge $\frac{\sqrt{4n^2+1}}{2n}$ und die Höhe des Dreiecks auf der Hypotenuse beträgt $\sqrt{\frac{1}{4n^2+1}}$. Legt man also den Bogen so auf das Bild, dass eine Kante des Bogens durch die rechte obere Ecke des Bildes geht und die untere Kante des Bildes in einer Entfernung von $\frac{1}{2n}$ von der rechten unteren Ecke schneidet, so geht die mittlere Längsachse des Bogens durch den Punkt auf der oberen Kante des Bildes, der Entfernung $\frac{1}{2n}$ zur rechten oberen Ecke hat (siehe Abbildung 3).

Klappt man nun den Bogen über die obere und untere Kante des Bildes nach hinten, so liegen die beiden Teile des Bogens genau aneinander. Man kann dies derart tun, dass der Bogen gerade an der rechten unteren Ecke des Bildes endet. Klappt man das eine Ende weiter abwechselnd über die obere Kante des Bildes nach vorne und über die untere Kante nach hinten, so endet der Bogen an der linken unteren Ecke des Bildes. Klappt man nun noch die vier über das Bild hinausragenden Teile nach vorne (auf der rechten Seite) beziehungsweise nach hinten (auf der linken Seite), so ist das gesamte Bild verpackt. Da keinerlei Überlappungen entstehen, reicht auch die Länge des Bogens für dieses Vorgehen aus. □

Aufgabe M.6 (8 P.)**.** Es sei $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a_n, b_n. Zeige, dass es unendlich viele Indizes n gibt mit $b_{n+1} < b_n$.

Lösung. Mit $N + 1 = 2 \cdot 3^m$ gilt $b_{N+1} < b_N$ für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$.

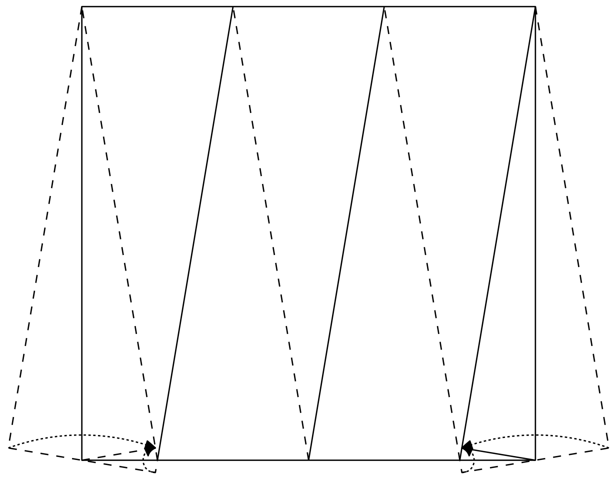

Abbildung 3: Die Verpackung in der Lösung von Aufgabe M.5 für $n = 3$.

Zunächst zeigt man, dass gilt $3^m \mid b_N$. Für $n < 3^m$ ist b_n nicht durch 3^m teilbar. Man schreibt nun

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{n+1}$$

folgendermaßen:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n \cdot \frac{n+1}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)} + \frac{b_n}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)}}{\mathrm{kgV}(b_n, n+1)}, \tag{5}$$

wobei Zähler und Nenner auf der rechten Seite ganze Zahlen, aber nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Für $n + 1 = 3^m$ ist nun $\frac{n+1}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)}$ durch 3 teilbar, $\frac{b_n}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)}$ hingegen nicht. Damit ist der Zähler in (5) nicht durch 3 teilbar, der Bruch somit nicht mit 3 kürzbar und folglich gilt $3^m \mid b_{n+1}$ und $3 \nmid a_{n+1}$.

Für $n+1 = 3^m+1, 3^m+2, \ldots, 2\cdot 3^m - 1$ ist b_{n+1} ebenfalls durch 3^m teilbar, da bei diesen $n + 1$ der Primfaktor 3 höchstens $m - 1$ Mal enthalten ist und somit, da $3^m \mid b_n$ (beginnend bei $n = 3^m$), $\frac{n+1}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)}$ nicht durch 3 teilbar ist, wohl aber $\frac{b_n}{\mathrm{ggT}(b_n, n+1)}$. Da a_n nicht durch 3 teilbar ist (beginnend bei $n = 3^m$) ist beim Schritt von n nach $n+1$ der Zähler in (5) nicht durch drei teilbar, man kann also nicht mit 3 kürzen und daher gilt $3^m \mid b_{n+1}$ und $3 \nmid a_{n+1}$. Das geht so bis $n = N = 2 \cdot 3^m - 1$. Hier sind nun $\frac{N+1}{\mathrm{ggT}(b_N, N+1)} = 1$ und $\frac{b_N}{\mathrm{ggT}(b_N, N+1)} = \frac{b_N}{2\cdot 3^m}$ beide nicht durch 3 teilbar. Da $2 \cdot 3^m \mid b_N$, ist $\mathrm{kgV}(b_N, N+1) = b_N$. Man zeigt, dass jetzt der Zähler in (5) durch 3 teilbar ist:

$$a_n \cdot \frac{N+1}{\mathrm{ggT}(b_N, N+1)} + \frac{b_N}{\mathrm{ggT}(b_N, N+1)} = \frac{b_N}{1} + \frac{b_N}{2} + \cdots + \frac{b_N}{2\cdot 3^m - 1} + \frac{b_N}{2\cdot 3^m} \tag{6}$$

$\frac{b_N}{3^m}$ und $\frac{b_N}{2\cdot 3^m}$ sind ganze Zahlen und $\frac{b_N}{2\cdot 3^m} + \frac{b_N}{3^m} = 3 \cdot \frac{b_N}{2\cdot 3^m}$ ist durch 3 teilbar. Da die linke Seite in (6) eine ganze Zahl ist, ist auch

$$X := \frac{b_N}{1} + \frac{b_N}{2} + \cdots + \widehat{\frac{b_N}{3^m}} + \cdots + \frac{b_N}{2\cdot 3^m - 1}$$

eine ganze Zahl, wobei $\widehat{\frac{b_N}{3^m}}$ bedeuten soll, dass dieser Term in der Summe fehlt. b_N ist nicht notwendigerweise durch alle Zahlen $1, 2, \ldots, \widehat{3^m}, \ldots, 2 \cdot 3^m - 1$ teilbar, jedoch enthält b_N die 3 als Primfaktor m-Mal und jede der Zahlen $1, 2, \ldots, \widehat{3^m}, \ldots, 2 \cdot 3^m - 1$ die 3 höchstens $m-1$-Mal. Somit ist auch die ganze Zahl X durch 3 teilbar. Damit ist (6) durch 3 teilbar, der Bruch (5) somit mit 3 kürzbar und daher $b_{N+1} \leq \frac{b_N}{3} < b_N$. □

Alternative Lösung. Es sei p eine ungerade Primzahl und $n := p^2 - p - 1$. Wir untersuchen zunächst die Summe von Stammbrüchen aufeinanderfolgenden Zahlen der Form $vp+1, vp+2, \ldots, vp+p-1$ für ein $v \in \mathbb{N}_0$, also

$$\frac{1}{vp+1} + \frac{1}{vp+2} + \cdots + \frac{1}{vp+(p-1)} = \frac{a}{b}$$

mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ und behaupten, dass $a \equiv 0 \pmod p$ und $b \not\equiv 0 \pmod p$. Bringen wir die linke Seite auf den Nenner $N = (vp+1)(vp+2)\cdots(vp+p-1)$, so ist zunächst klar, dass $p \nmid N$ gilt. Ferner ist

$$\frac{1}{vp+1} + \frac{1}{vp+2} + \cdots + \frac{1}{vp+p-1} = \frac{\frac{N}{vp+1} + \frac{N}{vp+2} + \cdots + \frac{N}{vp+(p-1)}}{N}.$$

Nun ist

$$\frac{N}{vp+j} \equiv \frac{N}{j} \equiv c_j \pmod p,$$

wobei man z.B. $c_j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ wählen kann mit $N \equiv jc_j \pmod p$. Wichtig ist nun, dass mit j auch c_j alle primen Reste modulo p durchläuft, so dass

$$\frac{N}{vp+1} + \frac{N}{vp+2} + \cdots + \frac{N}{vp+(p-1)} \equiv c_1 + c_2 + \cdots + c_{p-1} \equiv 1 + 2 + \cdots + p-1 \equiv 0 \pmod p$$

gilt. Nun setzen wir

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p^2-p-1} =: S_1 + S_2,$$

wobei wir in der Summe S_1 alle Nenner berücksichtigen, die nicht durch p teilbar sind. Dies sind genau $p-1$ Sequenzen von aufeinanderfolgenden Zahlen der oben betrachteten Form. Also ist

$$S_1 = \frac{c_1}{N_1} + \frac{c_2}{N_2} + \cdots + \frac{c_{p-1}}{N_{p-1}} = \frac{pA}{N}$$

mit $A, N \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid N$. Nun zu S_2: Hier gilt

$$S_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \cdots + \frac{1}{p^2-2p} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p-2} \frac{1}{j}.$$

Wieder mit den obigen Schlüssen ist

$$\sum_{j=1}^{p-2} \frac{1}{j} + \frac{1}{p-1} = \frac{pa'}{b'},$$

mit $a', b' \in \mathbb{N}$ und $p \nmid b'$, also

$$S_2 = \frac{a}{b\,p}$$

mit $a \equiv b \pmod{p}$ und $p \nmid a\,b$. Insgesamt erhalten wir

$$S_1 + S_2 = \frac{a_n}{b_n} = \frac{pA}{N} + \frac{a}{pb} = \frac{x_n}{p\,y_n}$$

mit $x_n \equiv y_n \pmod{p}$. Weiter ist dann

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} &= \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{p(p-1)}\\ &= \frac{x_n}{p\,y_n} + \frac{1}{p(p-1)}\\ &= \frac{(p-1)x_n + y_n}{p\,y_n(p-1)}\\ &= \frac{z_n}{y_n\,(p-1)}\end{aligned}$$

mit geeignetem $z_n \in \mathbb{N}$. Also ist b_{n+1} als Teiler von $y_n \cdot (p-1)$ sicher kleiner als $b_n = p\,y_n$. □

Aufgabe M.7 (9 P.)**.** Ein Quizmaster hat ein Kartendeck mit 52 Karten. Die Zuschauer möchten die Reihenfolge der Karten herausfinden, wobei es auf die Richtung „von oben nach unten“ oder „von unten nach oben“ nicht ankommt. Ihnen ist aber nur erlaubt zu fragen: „Wie viele Karten liegen zwischen der soundso-Karte und der soundso-Karte?“. Einer der Zuschauer hat die Anordnung der Karten in Erfahrung gebracht. Wie viele derartige Fragen muss dieser Zuschauer mindestens stellen, damit auch die anderen Zuschauer die exakte Anordnung herausfinden können?

Lösung. Es werden genau 34 Fragen benötigt.

Die Karten im Stapel seien (in dieser Reihenfolge) $x_1, x_2, \ldots, x_{52}$. Zunächst zeigen wir, dass weniger als 34 Fragen nicht ausreichen. Sei eine Menge von 33 Fragen gegeben, durch die die Reihenfolge eindeutig bestimmt wird. Addieren wir für alle Karten die Anzahlen der erfragten Abstände, so zählen wir jede Frage genau zweifach, erhalten also 66. Wären mindestens zwei Karten nie Teil eines Paares, deren Abstand im Stapel erfragt wird, dann wäre die Reihenfolge durch die gestellten Fragen nicht eindeutig festgelegt, da diese Karten in beliebiger Reihenfolge auftreten könnten. Ebenso gibt es keine Karten x_i und x_j, deren Abstand erfragt wird, aber nie der Abstand einer anderen Karte zu x_i oder x_j, da dann die Reihenfolge ebenfalls nicht eindeutig festgelegt wäre, denn x_i und x_j könnten vertauscht sein. Daher ist für mindestens 51 Karten ein Abstand erfragt worden und für höchstens 33 Karten genau ein Abstand (bei mehr als 33 Karten aber nur 33 Fragen müssten sonst zwei solche Karten ein Paar wie gerade betrachtet bilden), also für mindestens 18 Karten jeweils mindestens zwei Abstände. Die Summe der für jede Karte erfragten Abstände ist daher mindestens $51 + 18 = 69$, Widerspruch. (Bei 34 Fragen gibt es mindestens 17 Karten mit je mindestens zwei erfragten Abständen, und die Summe ergibt sich zu mindestens $51 + 17 = 68$, also kein Widerspruch zu $2 \cdot 34 = 68$.)

Zeigen wir nun, dass 34 Fragen ausreichen. Zunächst erfragen wir den Abstand von x_1 und x_{52} sowie von x_1 und x_3. Da es nicht darauf ankommt, ob die Reihenfolge vorwärts oder rückwärts herausgefunden wird, sind die Positionen dieser drei Karten somit bekannt. Als nächstes erfragen wir den Abstand von x_2 und x_{50}. Da Position 2 und 50 die einzigen noch möglichen Positionen dieses Abstandes sind, müssen die beiden Karten genau diese Positionen einnehmen, allerdings ist noch nicht klar, welche Karte welche dieser beiden Positionen einnimmt. Dann erfragen wir den Abstand zwischen x_2 und x_{49}. Nun kann x_2 nicht auf Position 50 sein, da ansonsten x_{49} auf Position 3 wäre, welche bereits vergeben ist. Also sind die Positionen von x_2, x_{49} und x_{50} festgelegt.

Von nun an sind nach je zwei Fragen (sagen wir nach insgesamt $2k$ Fragen) die Positionen von $3k$ Karten festgelegt und die noch möglichen Positionen für alle weiteren, noch nicht einbezogenen Karten wie folgt verteilt: Eine einzelne mögliche Position (zunächst ist dies Position 51), dann zwei nicht mehr mögliche Positionen (zunächst Positionen 50 und 49) und dann alle weiteren möglichen Positionen ohne Unterbrechung (zunächst Positionen 48 bis hinunter zu 4). Indem wir gegebenenfalls die Positionen umgekehrt nummerieren, können wir annehmen, dass die möglichen Positionen die Positionen m und $m+3$ bis $m+l$ sind (mit geeigneten m und $l = 53-3k$). Falls noch mehr als eine Position zu klären ist (also $k < 17$), sind noch mindestens vier Positionen zu klären.

Nun erfragen wir den Abstand von x_m und x_{m+l-1} sowie den Abstand von x_m und x_{m+l-2}. Auch hier müssen x_m und x_{m+l-1} gerade die Positionen m und $m+l-1$ einnehmen, da dies die einzigen möglichen Positionen dieses Abstandes sind. Und x_m kann nicht auf Position $m+l-1$ sein, da ansonsten x_{m+l-2} auf Position $m+1$ oder $m+2l-3$ wäre, welche beide nicht möglich sind. Daher sind die Positionen von x_m und x_{m+l-1} festgelegt, und x_{m+l-2} nimmt Position $m+l-2$ ein, da Position $m-l+2$ nicht möglich ist.

Nach diesen beiden Schritten ist die Situation wie zuvor, es kann also so lange auf diese Weise verfahren werden, bis nur noch die Position einer Karte zu klären ist. Für diese Karte ist aber nur noch eine Position möglich. Die Reihenfolge der Karten kann also mit den folgenden Fragen herausgefunden werden (wobei $d(x_i, x_j)$ der Frage nach dem Abstand zwischen x_i und x_j entspricht).

$$
\begin{aligned}
&d(x_1, x_{52}), d(x_1, x_3), d(x_2, x_{50}), d(x_2, x_{49}), d(x_{51}, x_5), d(x_{51}, x_6),\\
&d(x_4, x_{47}), d(x_4, x_{46}), d(x_{48}, x_8), d(x_{48}, x_9), d(x_7, x_{44}), d(x_7, x_{43}),\\
&d(x_{45}, x_{11}), d(x_{45}, x_{12}), d(x_{10}, x_{41}), d(x_{10}, x_{40}), d(x_{42}, x_{14}), d(x_{42}, x_{15}),\\
&d(x_{13}, x_{38}), d(x_{13}, x_{37}), d(x_{39}, x_{17}), d(x_{39}, x_{18}), d(x_{16}, x_{35}), d(x_{16}, x_{34}),\\
&d(x_{36}, x_{20}), d(x_{36}, x_{21}), d(x_{19}, x_{32}), d(x_{19}, x_{31}), d(x_{33}, x_{23}), d(x_{33}, x_{24}),\\
&d(x_{22}, x_{29}), d(x_{22}, x_{28}), d(x_{30}, x_{26}), d(x_{30}, x_{27})
\end{aligned}
$$

□

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.). Als Ann ihren neuen Job antritt, wird ihr als erstes mitgeteilt, welche Arbeitskollegen sich gegenseitig kennen. Um sich dies zu merken, fertigt sie sich folgendes Schema an. Sie zeichnet einen großen Kreis und repräsentiert jeden Mitarbeiter durch eine Sehne, wobei sich die Sehnen genau dann schneiden, wenn sich die zugehörigen Mitarbeiter kennen. Ann ist sicher, dass sie auf diese Weise die Konstellation in jeder beliebigen Firma exakt abbilden kann. Hat Ann Recht? (Zwei Sehnen schneiden sich bereits, wenn sie von dem gleichen Punkt ausgehen.)

LÖSUNG. Siehe Aufgabe M.2 □

Aufgabe O.2 (6 P.). Auf den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden drei Punkte – und zwar A_1 auf BC, B_1 auf AC und C_1 auf AB – so gewählt , dass A_1A, B_1B und C_1C gerade die Winkelhalbierenden in dem Dreieck $A_1B_1C_1$ sind. Zeigen Sie, dass AA_1, BB_1 und CC_1 die Höhen in dem Dreieck ABC sind.

LÖSUNG. Der Schnittpunkt von $\overline{A_1C_1}$ und $\overline{BB_1}$ heiße S. Des Weiteren ergänze man senkrecht zu $\overline{CC_1}$ eine Gerade durch C_1, von der zu zeigen ist, dass sie mit $\overline{AB}$ zusammenfällt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit $\overline{BB_1}$ sei B_{C_1}. Entsprechend zeichne man eine Gerade senkrecht zu $\overline{A_1A}$ durch A_1 und nenne deren Schnittpunkt mit $\overline{BB_1}$ B_{A_1}. Da $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ Winkelhalbierende sind, gilt $\angle AA_1C_1 + \angle C_1B_1B + \angle B_1C_1C = 90°$. Mit dem 90°-Winkel bei C_1 ergibt sich dann über das Dreieck $\triangle B_{C_1}B_1C_1$, dass $\angle B_1B_{C_1}C_1 = \angle AA_1C_1$. Da außerdem $\angle C_1SB_{C_1} = \angle A_1SB_1$, folgt $\left|\overline{B_{C_1}S}\right| = \frac{\left|\overline{A_1S}\right|\left|\overline{SC_1}\right|}{\left|\overline{SM}\right|}$ mit M dem Mittelpunkt dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Durch Spiegelung des Arguments erhält man außerdem $\left|\overline{B_{A_1}S}\right| = \frac{\left|\overline{C_1S}\right|\left|\overline{SA_1}\right|}{\left|\overline{SM}\right|}$. Damit gilt $B_{A_1} = B_{C_1}$. Zeichnet man also zu den Winkelhalbierenden Senkrechte ein, so erhält man ein Dreiecke, bei dem die Winkelhalbierenden des inneren Dreieckes gerade die Höhen des äußeren sind.

Wäre nun $B \neq B_{C_1}$, gäbe es zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle B_{C_1}C_{A_1}A_{B_1}$, deren Seiten sich in A_1, B_1 bzw. C_1 schneiden würden. Es könnte nun B näher als B_{C_1} an B_1 liegen, dann würde aber wegen des gemeinsamen Punktes C_1 A weiter als A_{B_1} von A_1 entfernt liegen. Damit würde dann C näher als C_{A_1} an C_1 liegen und damit B weiter als B_{C_1} von B_1 entfernt sein, womit der Widerspruch diesen Fall ausschließt. Analog ist auch der andere Fall nicht möglich und es muss $B = B_{C_1}$ gelten, womit das Dreieck $\triangle ABC$, die in der Aufgabe geforderten Bedingungen erfüllt. □

Aufgabe O.3 (6 P.). Es sei $a = 0,12457\ldots$ die Zahl, deren n-te Ziffer hinter dem Komma genau die letzte Dezimalstelle vor dem Komma von $n\sqrt{2}$ ist. Zeigen Sie, dass a keine rationale Zahl ist.

LÖSUNG. Angenommen, a wäre rational. Dann gäbe es in der Dezimaldarstellung von a eine Periode, also insbesondere ein k und ein n, so dass die n-te Ziffer von a nach dem Komma mit der $(n+k)$-ten, der $(n+2k)$-ten etc. übereinstimmt.

Wir schreiben $k\sqrt{2}$ als $10m + x$ mit $m \in \mathbb{N}$, wobei wir x so wählen, dass es den kleinstmöglichen Betrag hat (insbesondere $|x| \leq 5$). Die letzte Ziffer von $(n + k)\sqrt{2}$ vor dem Komma stimmt somit mit der letzten Ziffer von $x + n\sqrt{2}$ vor dem Komma überein. Wäre $|x| \geq 1$, so stimmten die letzten Ziffern von $n\sqrt{2}$ und $x + n\sqrt{2}$ vor dem Komma nicht überein. Da $\sqrt{2}$ nicht rational ist, gilt $0 < |x| < 1$. Dann gibt es aber ein $l \in \mathbb{N}$ mit $1 < |lx| < 2$ und die letzten Ziffern von $n\sqrt{2}$ und $lx + n\sqrt{2}$ vor dem Komma stimmen nicht überein. Damit stimmen aber auch die n-te und die $(n + lk)$-te Ziffer von a nach dem Komma nicht überein, Widerspruch. Also ist a irrational. □

Aufgabe O.4 (4 P.)**.** Kann ein Prisma in lauter sich nicht überschneidende Pyramiden derart zerlegt werden, dass die Grundfläche jeder Pyramide Teil einer Grundfläche des Prismas ist und ihre Spitze auf der anderen Grundfläche des Prismas liegt?

Lösung. Das Volumen des Prismas berechnet sich als Produkt von Höhe und Fläche der Grundseite. Das Volumen jeder Pyramide berechnet sich als ein Drittel des Produktes von Höhe und Fläche der Grundseite. Da die Grundseiten maximal die komplette Unter- und Oberseite des Prismas bedecken können und die maximale Höhe der Pyramiden mit der Höhe des Prismas übereinstimmen, können die Pyramiden maximal zwei Drittel des Volumens des Prismas nicht jedoch das ganze füllen. □

Aufgabe O.5 (7 P.)**.** Es sei $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a_n, b_n. Zeige, dass es unendlich viele Indizes n gibt mit $b_{n+1} < b_n$.

Lösung. Siehe Aufgabe M.6 □

Aufgabe O.6. Wir sagen, dass die Karten eines 52-Kartendecks regulär geordnet sind, sofern je zwei benachbarte Karten entweder die gleiche Farbe (Pik, Kreuz, Herz, Karo) oder den gleichen Wert (Zwei bis Zehn, Bube, Dame, König, Ass) haben. Das Gleiche muss auch für die oberste und die unterste Karte gelten. Ferner muss noch die oberste Karte Pik Ass sein. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller möglichen regulären Anordnungen durch

(a) (3 P.) 12!

(b) (5 P.) 13!

teilbar ist.

Lösung. Hier wird der Teil b gezeigt, welcher natürlich Teil a beinhaltet.

Wir ordnen die Karten – entsprechend ihrer Reihenfolge im Stapel – im Kreis an. Zwei Anordnungen der Karten im Kreis wollen wir auch dann *gleich* nennen, wenn sie durch Drehung des Kreises auseinander entstehen (da sie die gleiche Anordnung in einem Stapel mit dem Pik Ass ganz oben liefern). Um zu zeigen, dass die Gesamtzahl aller regulären Anordnungen durch 13! teilbar ist, werden wir alle regulären Anordnungen derart auf Mengen verteilen, dass jede Menge genau 13! Anordnungen enthält; hieraus folgt offensichtlich die Behauptung.

Aus einer regulären Anordnung können wir stets eine neue reguläre Anordnung gewinnen, indem wir die Werte permutieren, also etwa jede Neun dorthin, wo vorher der König gleicher Farbe war, etc. Lässt sich eine Anordnung A aus einer Anordnung B durch Permutation der Werte gewinnen, so lässt sich B auch aus A durch eine geeignete Permutation der Werte gewinnen. Wir können also jeweils genau die regulären Anordnungen in einer Menge zusammenfassen, welche sich durch Permutation der Werte auseinander gewinnen lassen. Da es genau 13! Permutationen der Werte gibt, hat jede solche Menge 13! Elemente, vorausgesetzt, dass verschiedene Permutationen verschiedene Anordnungen liefern.

Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass sich aus der regulären Anordnung A durch zwei verschiedene Permutationen die Anordnung B gewinnen lässt, dementsprechend lässt sich auch A aus B durch zwei verschiedene

Permutationen gewinnen. Dann gibt es offenbar neben der trivialen Permutation (man vertausche nichts) eine weitere Permutation σ, die A nicht verändert. Wir wollen dies zu einem Widerspruch führen.

Wir sagen, bei einer Karte findet ein *Farbwechsel* statt, wenn die in A folgende Karte den gleichen Wert hat, anderenfalls sagen wir, es findet ein *Wertwechsel* statt. Es können nicht nur Farbwechsel stattfinden, es gibt also eine Farbe – ohne Einschränkung Kreuz –, so dass bei einer Karte dieser Farbe ein Wertwechsel stattfindet. Allerdings kann nicht bei allen Karten der Farbe Kreuz ein Wertwechsel stattfinden, es gibt unter diesen Karten also sowohl Farb- als auch Wertwechsel.

Nun sehen wir uns die Reihenfolge an, in der die Karten der Farbe Kreuz auftreten. Da A durch σ nicht verändert wird, wird auch diese Reihenfolge nicht verändert, die Karten der Farbe Kreuz werden also innerhalb der von ihnen eingenommenen Positionen lediglich um eine feste Anzahl von Plätzen verschoben. Mit anderen Worten, es gibt ein k, so dass σ jede Karte der Farbe Kreuz auf den Platz der k.-nächsten Karte der Farbe Kreuz verschiebt. Nach Wahl von σ ist $k \neq 0$, also $1 \leq k \leq 12$.

Wir zählen nun die Karten der Farbe Kreuz in einer bestimmten Reihenfolge auf: Wir beginnen mit dem Kreuz Ass, dann das k.-nächste Kreuz, dann das k.-nächste Kreuz hiernach, und so weiter, bis wir wieder zum Kreuz Ass gelangen. Jede Karte wird also durch σ auf die Position genau jener Karte verschoben, welche in dieser Reihenfolge als nächste kommt. Da aber unter diesen Karten sowohl Farb- als auch Wertwechsel auftreten, gibt es zwei in dieser Reihenfolge aufeinander folgende Karten, so dass bei einer Karte ein Wertwechsel und bei der anderen ein Farbwechsel stattfindet. Die Situation bei der ersten dieser beiden Karten hat sich durch σ also verändert, weswegen A durch σ nicht unverändert bleiben kann.

Somit liefern zwei verschiedene Permutationen stets verschiedene Anordnungen, weswegen jede von uns konstruierte Menge genau 13! reguläre Anordnungen enthält. Also ist die Gesamtzahl der regulären Anordnungen durch 13! teilbar. □

Aufgabe O.7. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ positive Zahlen mit

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 < \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{2} \quad \text{und} \quad x_1+x_2+\cdots+x_k < \frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3}{2}.$$

(a) (3 P.) Zeigen Sie: $k > 50$;

(b) (3 P.) Geben Sie ein konkretes Beispiel für irgend ein k an;

(c) (3 P.) Finden Sie das kleinste k, für das ein solches Beispiel existiert.

LÖSUNG. (a) Wir schreiben $S_i := x_1^i + x_2^i + \cdots + x_k^i$ für $i = 1, 2, 3$. Die geforderten Ungleichungen sind in dieser Schreibweise $2S_2 < S_1$ und $2S_1 < S_3$.

Hieraus folgt $4S_2 < S_3$. Wäre $x_j \leq 4$ für jedes $1 \leq j \leq k$, so wäre auch $4S_2 \geq S_3$, also ist ohne Einschränkung $x_1 > 4$. Damit ist $2x_1^2 - x_1 > 28$. Betrachten wir nun für ein $j \geq 2$ die Differenz $x_j - 2x_j^2 = x_j(1 - 2x_j)$, stellen wir fest, dass diese für $x_j = \frac{1}{4}$ maximal ist, nämlich $x_j(1-2x_j) = \frac{1}{8}$. Aus der Ungleichung $2S_2 < S_1$ folgt somit $k > 1 + 28 \cdot 8 = 245$.

(b) Sei $k = 2001$, $x_1 = 10$ und $x_2 = x_3 = \dots = x_k = \frac{1}{4}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} S_1 &= 10 + 2000 \cdot \frac{1}{4} = 510 \\ S_2 &= 100 + 2000 \cdot \frac{1}{16} = 225 \\ S_3 &= 1000 + 2000 \cdot \frac{1}{64} = 1031,25 \end{aligned}$$

und somit $2S_2 = 450 < S_1$ und $2S_1 = 1020 < S_3$.

(c) Wir geben an dieser Stelle lediglich eine Skizze des Beweises, da der vollständige Beweis zu lang wäre. Sollten wir noch zu einem kürzeren Beweis gelangen (etwa aus Moskau), werden wir ihn hier gegebenenfalls einfügen.

Das minimale k, für welches eine Lösung existiert, ist $k = 516$. Eine dazugehörige Lösung ist etwa $x_1 = 5,2$ und $x_i = 0,12745$ für $i \geq 2$. (Die Angabe einer Lösung ist für diese Aufgabe nicht nötig. Es ist ebenfalls möglich, die Existenz einer Lösung zu beweisen, ohne eine solche explizit anzugeben.)

Zum Beweis, dass dies das minimale k ist, zeigt man zunächst, dass für alle i entweder $x_i < \frac{1}{2}$ oder $x_i > \sqrt{2}$ gilt. Als nächstes zeigt man, dass es nur ein i mit $x_i > \sqrt{2}$ gibt, dies sei x_1. (In beiden Fällen kann man zeigen, dass es ansonsten eine Lösung mit weniger x_i gäbe.)

Betrachtet man das Verhältnis $\frac{x_1^3 - 2x_1}{2x_1^2 - x_1}$ (also das „Guthaben“, das x_1 zur Erfüllung von $S_3 > 2S_1$ beiträgt, geteilt durch das „Defizit“, welches x_1 zur Erfüllung von $S_1 > 2S_2$ beiträgt), so findet man genau eine Zahl $x_{\text{opt}} < \frac{1}{2}$, welche das gleiche Verhältnis hat. Nun beweist man, dass man annehmen kann, dass $x_i \leq x_{\text{opt}}$ gilt für jedes $i \geq 2$ (grob gesagt verlieren Werte $x_i > x_{\text{opt}}$ zu viel bei $x_i^3 - 2x_i$ im Verhältnis zu dem, was sie bei $x_i - 2x_i^2$ gewinnen). Nun kann man mittels x_{opt} abschätzen, wie viele „kleine“ x_i man braucht, um die (positive) Differenz $x_1^2 - 2x_1$ auszugleichen.

Zuletzt muss man noch bestimmen, für welche x_1 dieser Wert minimal ist. Man kann dann sehen, dass dieser Wert stets größer als 514 ist und dass für $x_1 = 5,2$ gerade 515 „kleine“ x_i ausreichen, jeweils etwas kleiner als $x_{\text{opt}} = \frac{6}{47}$.

□

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Thomas Kecker, Jan Christoph Kinne, Klaus Sielaff, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.