25- Internationaler Mathematik,Städtewettbewerb, Frühjahr 2004

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [4 P.]

Eine endliche arithmetische Progression, also $a, a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ bestehe aus lauter ganzen Zahlen. Addiert man alle diese Zahlen auf, so ergibt sich eine Zweierpotenz. Beweise, dass dann auch die Anzahl der Zahlen eine Zweierpotenz sein muss.

Aufgabe 2: [5 P.]

Wieviele Steine kann man höchstens auf einem 8×8-Dame-Spiel-Brett (üblicherweise die 32 schwarzen Felder eines Schach-Bretts) so unterbringen, dass jeder Stein geschlagen werden kann. (Dabei kann im Dame-Spiel bekanntlich ein Stein auf einem Feld y genau dann geschlagen werden, wenn von den diagonal aufeinanderfolgenden Feldern x, y, z genau eines der Nachbarfelder x oder z frei ist.)

Aufgabe 3: [5 P.]

An jedem Tag ändert sich der Aktienkurs der „Seifenblasen AG“ um einen festen Prozentsatz $n\%$ (bezogen auf den Vortag) entweder nach oben oder nach unten. Dabei ist n eine ganze Zahl mit $0 < n < 100$. Man denke sich dabei die Kurse beliebig genau berechnet. Kann es sein, dass die Aktienkurse an zwei verschiedenen Tagen exakt übereinstimmen?

Aufgabe 4: [6 P.]

Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Ihre gemeinsame Tangente (die näher bei B verläuft) berührt die Kreise in den Punkten E und F. Die Gerade durch AB schneidet die Tangente EF in M. Der Punkt K werde auf der Verlängerung von AM hinter M so gewählt, dass $|KM| = |MA|$. Die Gerade durch K und E schneidet den Kreis, auf dem E liegt, ein zweites Mal in dem Punkt C. Die Gerade durch K und F schneidet den Kreis, auf dem F liegt, ein zweites Mal in dem Punkt D. Zeige, dass die Punkte C, A, D auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 5: [6 P.]

Ein Billiardtisch hat die Gestalt eines Polygons (nicht notwendig konvex, d.h. es sind auch einspringende Ecken erlaubt), wobei zwei benachbarte Kanten stets aufeinander senkrecht stehen. In jeder Ecke befindet sich ein punktförmiges Loch, in dem die (punktförmige) Billiardkugel verschwindet. In einer Ecke A mit innerem 90° Winkel beginnt nun eine Kugel reibungsfrei zu rollen, wobei sie an den Kanten nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Reflexionswinkel“ reflektiert wird. Beweise, dass sie niemals nach A zurückkehrt.

Aufgabe 6: [7 P.]

Anfangs steht auf einer Tafel die (riesengroße) Zahl $2004! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2004$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, von der Zahl an der Tafel eine nicht größere natürliche Zahl abzuziehen, die aber nur von höchstens 20 verschiedenen Primzahlen geteilt wird. Die Differenz wird dann als neue Zahl auf die Tafel geschrieben. Gewinner ist, wer die Zahl 0 erreichen kann. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie muss er spielen, um stets zu gewinnen?

Alle Aussagen sind zu begründen. An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. **Viel Erfolg !**