Städtewettbewerb Frühjahr 2004
Lösungsvorschläge

Hamburg

30. März 2004 [Version 4. Mai 2004]

Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.) Eine endliche arithmetische Progression, also $a, a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ bestehe aus lauter ganzen Zahlen. Addiert man alle diese Zahlen auf, so ergibt sich eine Zweierpotenz. Beweise, dass dann auch die Anzahl der Zahlen eine Zweierpotenz sein muss.

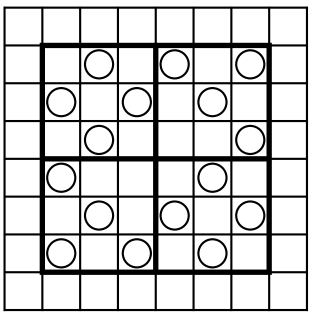
Lösung Da die einzelnen Elemente der arithmetischen Progression $a, a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ ganzzahlig sind, ist insbesondere $a \in \mathbb{Z}$ und wegen $a+b \in \mathbb{Z}$ auch $b \in \mathbb{Z}$. Nach Vorraussetzung gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$2^m = \sum_{k=0}^{n-1}(a+kb) = na + \frac{n(n-1)}{2}b \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^{m+1} = n\big(2a+(n-1)b\big).$$

Wegen $a, b, n \in \mathbb{Z}$ ist n also ein Teiler von 2^{m+1} und somit eine Zweierpotenz.$\square$

Aufgabe 2 (5 P.) Wie viele Steine kann man höchstens auf einem 8×8-Dame-Spiel-Brett (üblicherweise die 32 schwarzen Felder eines Schach-Bretts) so unterbringen, dass jeder Stein geschlagen werden kann. (Dabei kann im Dame-Spiel bekanntlich ein Stein auf einem Feld y genau dann geschlagen werden, wenn von den diagonal aufeinanderfolgenden Feldern x, y, z genau eines der Nachbarfelder x oder z frei ist.)

Lösung Der Rand bleibt leer. Teilt man die verbleibenden Felder in 4 3×3-Quadrate auf, so dürfen in jedem höchstens 4 Steine liegen. Denn in den Quadraten, in denen 5 Steine liegen könnten, kann bei voller Besetzung der mittlere Stein nicht geschlagen werden. Eine solche Konfiguration ist hier angegeben:



$\square$

Aufgabe 3 (5 P.) An jedem Tag ändert sich der Aktienkurs der „Seifenblasen AG“ um einen festen Prozentsatz $n\%$ (bezogen auf den Vortag) entweder nach oben oder nach unten. Dabei ist n eine ganze Zahl mit $0 < n < 100$. Man denke sich dabei die Kurse beliebig genau berechnet. Kann es sein, dass die Aktienkurse an zwei verschiedenen Tagen exakt übereinstimmen?

Lösung Nein. Angenommen, der Aktienkurs stimmt nach m Tagen überein, wobei er an a Tagen gestiegen und an b Tagen gefallen ist, so gilt $a+b=m$ und

$$(1+\tfrac{n}{100})^a(1-\tfrac{n}{100})^b = 1$$

oder

$$(100+n)^a(100-n)^b = 100^m.$$

Hieran erkennt man sofort, dass $10|n$, denn man rechne einfach modulo 2, bzw. modulo 5. Also gilt $n = 10k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt weiter

$$(100+10k)^a(100-10k)^b = 100^m \qquad \text{oder} \qquad (10+k)^a(10-k)^b = 10^m.$$

Analog ergibt sich hieraus $10|k$, also insgesamt $100|n$, ein Widerspruch. □

Aufgabe 4 (6 P.) Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Ihre gemeinsame Tangente (die näher bei B verläuft) berührt die Kreise in den Punkten E und F. Die Gerade durch AB schneidet die Tangente EF in M. Der Punkt K werde auf der Verlängerung von AM hinter M so gewählt, dass $|KM| = |MA|$. Die Gerade durch K und E schneidet den Kreis, auf dem E liegt, ein zweites Mal in dem Punkt C. Die Gerade durch K und F schneidet den Kreis, auf dem F liegt, ein zweites Mal in dem Punkt D. Zeige, dass die Punkte C, A, D auf einer Geraden liegen.

Lösung Da $CABE$ und $ADFB$ Sehnenvierecke sind, gilt

$$\angle BEK = 180^\circ - \angle CEB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAC) = \angle BAC$$

und analog

$$\angle KFB = 180^\circ - \angle BFD = 180^\circ - (180^\circ - \angle DAB) = \angle DAB.$$

Nach Sekanten-Tangentensatz gilt:

$$\begin{aligned} & \overline{ME}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MA} = \overline{MF}^2 \\ \Rightarrow \quad & \overline{ME} = \overline{MF}. \end{aligned}$$

Wegen $\overline{KM} = \overline{MA}$ ist also $AFKE$ ein Parallelogramm und folglich gilt:

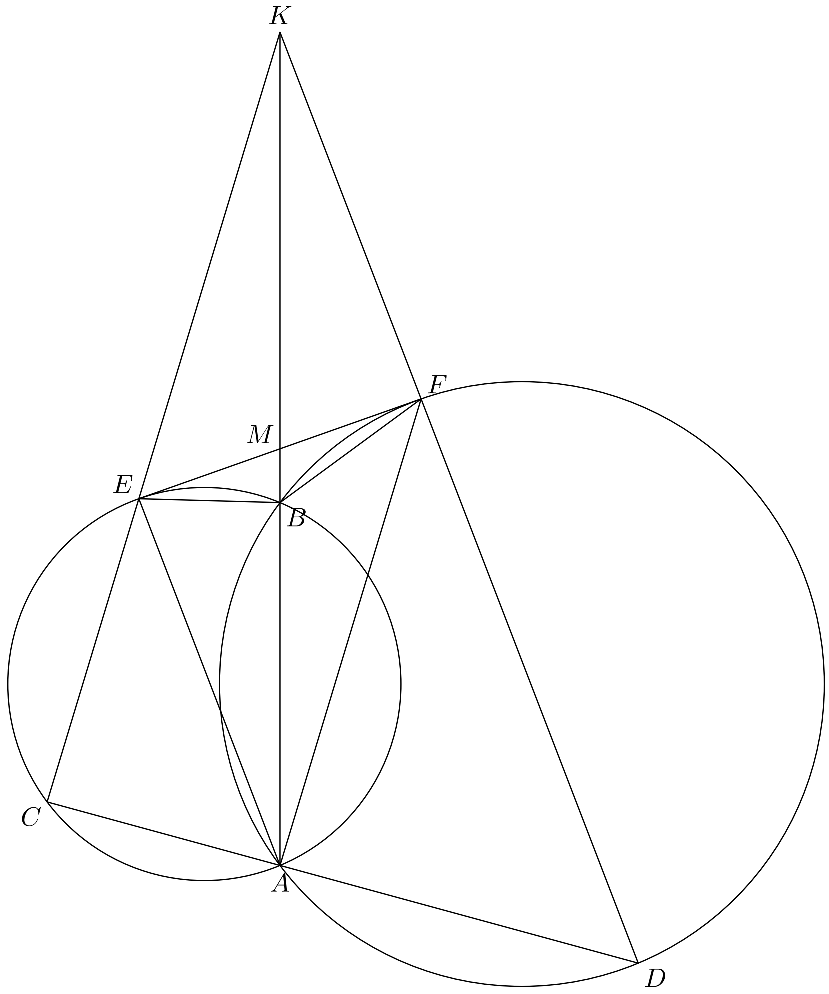
$$\angle BAE = \angle BKF.$$

Hiermit folgt aus dem Peripherie- und Sehnentangentenwinkelsatz, in dem Kreis, der E enthält

$$\angle BEF = \angle BAE = \angle BKF.$$

Nach Peripheriewinkelsatz ist $BFKE$ also ein Sehnenviereck, und es gilt

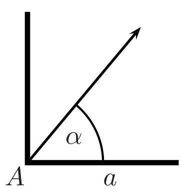
$$180^\circ = \angle BEK + \angle KFB = \angle BAC + \angle DAB = \angle DAC.$$



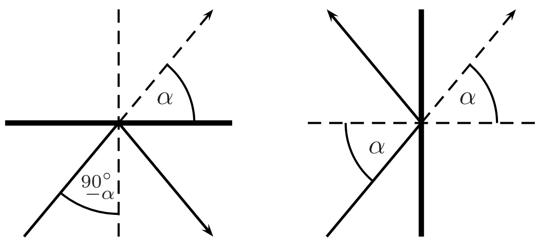
□

Aufgabe 5 (6 P.) Ein Billiardtisch hat die Gestalt eines Polygons (nicht notwendig konvex, d.h. es sind auch einspringende Ecken erlaubt), wobei zwei benachbarte Kanten stets aufeinander senkrecht stehen. In jeder Ecke befindet sich ein punktförmiges Loch, in dem die (punktförmige) Billiardkugel verschwindet. In einer Ecke A mit innerem $90°$ Winkel beginnt nun eine Kugel reibungsfrei zu rollen, wobei sie an den Kanten nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Reflexionswinkel" reflektiert wird. Beweise, dass sie niemals nach A zurückkehrt.

Lösung Es sei a eine der beiden Kanten des Billiardtisches durch A und $0° < \alpha < 90°$ (in den Grenzfällen verschwindet der Ball in der nächsten Ecke) der Ausfallswinkel des Balls bezüglich a.



Man überlegt sich leicht, dass die Einfallswinkel stets $\alpha \neq 0°$ oder $90° - \alpha \neq 0°$ sind und der Ball sich auf Geraden mit Steigungswinkel $\pm\alpha$ (bezüglich a) bewegt.



Kehrt der Ball nach A zurück, so geschieht dies mit Einfallswinkel α bezüglich a, d.h. der Ball kehrt wegen „Einfallswinkel = Reflexionswinkel“ auf dem gleichen Weg zu A zurück, wie er A verlassen hat. Es tritt also eine Reflexion an einer zum Weg senkrechten Seite auf, was nicht möglich ist, da der Einfallswinkel stets von Null verschiedenen ist. □

Aufgabe 6 (7 P.) Anfangs steht auf einer Tafel die (riesengroße) Zahl $2004! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2004$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, von der Zahl an der Tafel eine nicht größere natürliche Zahl abzuziehen, die aber nur von höchstens 20 verschiedenen Primzahlen geteilt wird. Die Differenz wird dann als neue Zahl auf die Tafel geschrieben. Gewinner ist, wer die Zahl 0 erreichen kann. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie muss er spielen, um stets zu gewinnen?

Lösung Es sei

$$P := \prod_{i=1}^{21} p_i, \qquad\qquad A := \{m \big| m = nP, n \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei p_i die i-te Primzahl ist. Die ersten 21 Primzahlen sind kleiner als 2004, es sind nämlich

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71 \text{ und } 73.$$

Da $P|(a - a')$ für $a, a' \in A$ mit $a > a'$ gilt, ist es nicht möglich, in einem Zug von einem Element aus A wieder zu einem Element aus A zu gelangen. Andererseits besitzt jede natürliche Zahl kleiner P höchstens 20 verschiedene Primfaktoren. Man gelangt von $b \notin A$ mit $nP > b > (n-1)P$ wegen $P > b - (n-1)P$ zu $(n-1)P \in A$. Es ist $0 \in A$ und $P|2004!$. Folglich gewinnt Spieler 2, indem dieser in jedem Zug auf das nächstkleinere Element aus A zieht. □

Oberstufe

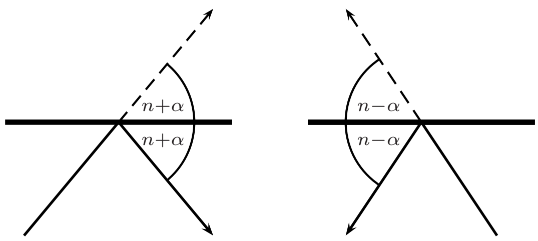
Aufgabe 1 (4 P.) An jedem Tag ändert sich der Aktienkurs der „Seifenblasen AG“ um einen festen Prozentsatz $n\%$ (bezogen auf den Vortag) entweder nach oben oder nach unten. Dabei ist n eine ganze Zahl mit $0 < n < 100$. Man denke sich dabei die Kurse beliebig genau berechnet. Kann es sein, dass die Aktienkurse an zwei verschiedenen Tagen exakt übereinstimmen?

LÖSUNG Siehe Lösung 3 der Mittelstufe. □

Aufgabe 2 (6 P.) Ein Billiardtisch hat die Gestalt eines Polygons (nicht notwendig konvex, d.h. es sind auch einspringende Ecken erlaubt), wobei zwei benachbarte Kanten stets einen Winkel mit einer ganzzahligen Gradzahl bilden. In jeder Ecke befindet sich ein punktförmiges Loch, in dem die (punktförmige) Billiardkugel verschwindet. In einer Ecke A mit innerem $1°$ Winkel beginnt nun eine Kugel reibungsfrei zu rollen, wobei sie an den Kanten nach dem Gesetz „Einfallswinkel = Reflexionswinkel“ reflektiert wird. Beweisen Sie, dass die Kugel niemals nach A zurückkehrt.

LÖSUNG Angenommen, die Kugel gelangt wieder nach A. Dann kann sie nicht parallel zu einer der Kanten an A gestartet sein, da sie ansonsten im Loch am anderen Ende dieser Kante verschwunden wäre. Sei daher α der Winkel, in dem die Kugel zu der Kante a an A gestartet ist, also $0° < \alpha < 1°$. Hierbei sei a wie in Lösung 5 der Mittelstufe die „untere“ der beiden Kanten an A. Zunächst bewegt sich die Kugel also auf einer Geraden mit Steigungswinkel α (bezüglich a).

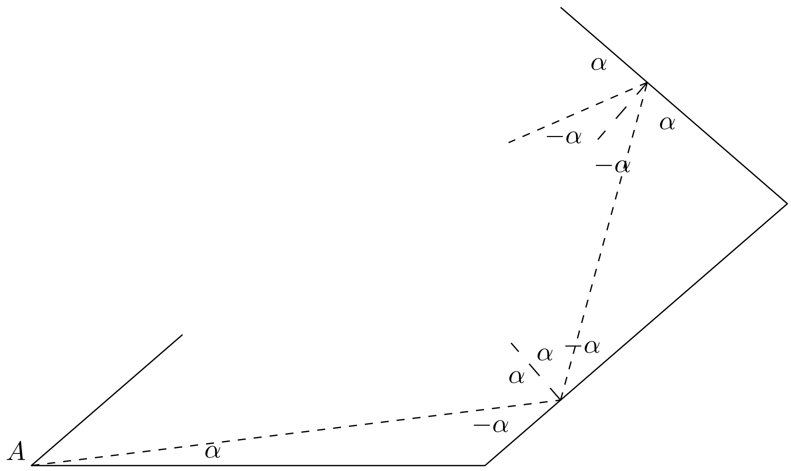
Da an jeder Ecke des Tisches der innere Winkel ganzzahlig ist, ist der Winkel zwischen zwei beliebigen Kanten, auch zwischen solchen, die nicht benachbart sind, ganzzahlig. Man überlegt sich leicht, dass die Richtungsänderung der Kugel bei der ersten Bandenberührung von der Form $\pm 2n - 2\alpha$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ (gegen den Uhrzeigersinn gemessen) ist.

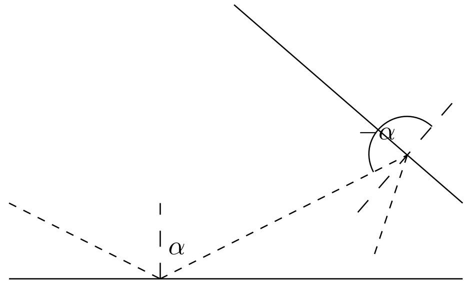


Damit bewegt sich die Kugel nach dieser ersten Bandenberührung auf einer Geraden mit Steigungswinkel $\pm 2n - \alpha$ (bezüglich a). Nun hat sich die Situation umgekehrt, und die Richtungsänderung der Kugel bei der zweiten Bandenberührung ist von der Form $\pm 2m + 2\alpha$ mit $m \in \mathbb{N}_0$. Die Kugel bewegt sich hiernach also auf einer Geraden mit Steigungswinkel $\pm 2n \pm 2m + \alpha$ (bezüglich a). Nun befinden wir uns wieder in der Ausgangssituation, woraus folgt, dass sich die Kugel stets auf einer Geraden mit Steigungswinkel $2k \pm \alpha$ (bezüglich a) mit $k \in \mathbb{N}_0$ bewegt. Bei der Rückkehr nach A muss der Steigungswinkel zwischen $180°$ und $181°$ liegen. Dies ist nur dann der Fall, wenn er genau $180° + \alpha$ beträgt. Dies ist exakt die entgegengesetzte Richtung, in der die Kugel gestartet ist.

Die Kugel kann aber nicht auf der gleichen Bahn wieder nach A zurücklaufen, auf der sie zu Anfang gestartet ist, da ansonsten an einer Bande ein Einfallswinkel von $90°$ hätte sein müssen, damit die Kugel von dort auf dem gleichen Weg wieder zurück läuft. Dies kann aber wegen $0° < \alpha < 1°$ nicht geschehen. Somit kann die Kugel nicht nach A zurückkehren.

Alternativ kann man sich auch Überlegungen zur Innenwinkelsumme des Bahnpolygons an folgenden Zeichnungen machen, wobei die Bezeichnungen *nicht* mit denen von oben übereinstimmen:





□

Aufgabe 3 (6 P.) Eine Dreieckspyramide wird senkrecht auf eine Ebene so projiziert, dass die Projektion einen maximale Flächeninhalt hat. Zeigen Sie, dass dann diese Ebene entweder zu einer der Pyramidenflächen oder zu zwei sich nicht schneidenden Kanten der Pyramide parallel ist.

LÖSUNG Sei eine beliebige senkrechte Projektion gegeben, die nicht einem dieser Fälle entspricht. Die Fläche der Projektion ergibt sich durch die Projektionen A', B', C', D' der Pyramidenecken A, B, C, D auf die Ebene und der Berechnung der Fläche, die diese mitsamt aller Kanten, die zwischen ihnen verlaufen, einschließen. Es können hierbei zwei Fälle auftreten: Entweder gibt es in der Projektion ein Dreieck, oBdA das Dreieck $\triangle A'B'C'$, so dass D' im Inneren dieses Dreiecks liegt, oder es gibt kein solches Dreieck.

- Im ersten Fall entspricht die Fläche der Projektion der Fläche von $\triangle A'B'C'$. Die Fläche von $\triangle ABC$ ist $\frac{1}{2}|AB|\,|BC|\sin(\angle ABC)$. Hierbei entspricht $|AB|\sin(\angle ABC)$ dem Abstand von A zur Geraden durch B und C, also der Länge der Höhe h des Dreiecks bezüglich der Grundseite BC. Da die Ebene nicht parallel zu einer Fläche ist, ist entweder h oder BC nicht parallel zur Ebene und damit gilt $|B'C'| < |BC|$ oder $|h'| < |h|$, wobei h' die Höhe von $\triangle A'B'C'$ bezüglich der Grundseite $B'C'$ bezeichnet. Damit ist die Fläche der Projektion kleiner als die Fläche von $\triangle ABC$ und somit nicht maximal. (Genaugenommen kann es vorkommen, dass in dem Fall, dass die Ebene parallel zu $\triangle ABC$ ist, D' nicht innerhalb von $\triangle A'B'C'$ liegt, aber dann ist die Fläche der Projektion lediglich noch größer als hier berechnet.)

- Im zweiten Fall entspricht die Fläche der Projektion der Summe der Flächen der Projektion zweier Dreiecke. OBdA seien dies die Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle A'B'D'$. Verschiebt man die Kante AB im Raum ohne ihre Richtung zu ändern, so bleibt sich der zu bestimmende Flächeninhalt des Vierecks $A'C'B'D'$ konstant, da Winkel und Längen hierdurch unbeeinflusst bleiben. Die Fläche der Projektion entspricht also der Fläche der Projektion des Vierecks $ACBD$, bei dem die Kante AB so verschoben wurde, dass sie CD schneidet. Da sich dieses Viereck aus zwei Dreiecken zusammensetzt, ist nach der obigen Begründung die Fläche der Projektion dieses Vierecks genau dann maximal, wenn es parallel zur Ebene ist. Da dies nur dann der Fall ist, wenn die Ebene parallel zu AB und CD ist, ist die Fläche der Projektion der Pyramide nicht maximal.

Erfüllt die Projektion also nicht eine der beiden Bedingungen, so ist die Fläche nicht maximal. Somit muss die Projektion eine der beiden Bedingungen erfüllen, wenn die Fläche maximal ist. □

Aufgabe 4 (6 P.) Anfangs steht auf einer Tafel die (riesengroße) Zahl $2004! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2004$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, von der Zahl an der Tafel eine nicht größere natürliche Zahl abzuziehen, die aber nur von höchstens 20 verschiedenen Primzahlen geteilt wird. Die Differenz wird dann als neue Zahl auf die Tafel geschrieben. Gewinner ist, wer die Zahl 0 erreichen kann. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie muss er spielen, um stets zu gewinnen?

LÖSUNG Siehe Lösung 6 der Mittelstufe. □

Aufgabe 5 (7 P.) Die Parabel $y = x^2$ und ein Kreis schneiden sich in genau zwei Punkten A und B. Ferner sei A ein Berührpunkt, d.h. in A stimmen die Tangente an die Parabel und die Tangente an den Kreis überein. Müssen sich dann auch die Parabel und der Kreis in B berühren?

LÖSUNG Es sei

$$P(x) := (x - x_0)^2 + (x^2 - y_0)^2 - r^2 = x^4 + x^2(1 - 2y_0) + x(-2x_0) + ({x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2).$$

Die Gleichung $P(x) = 0$ habe genau zwei Lösungen $a \neq b$. Außerdem gelte für $x = a$:

$$\begin{aligned} & P'(a) = 4a^3 + 2a(1 - 2y_0) + (-2a_0) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2a^3 - 2ay_0 = x_0 - a \\ \Leftrightarrow \quad & 2a = \frac{x_0 - a}{a^2 - y_0} \end{aligned}$$

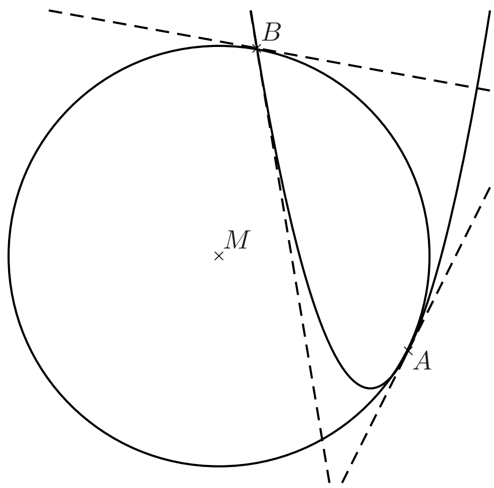
Somit stimmen im Punkt $A = (a, a^2)$ die Tangenten an Parabel und $K_r(x_0, y_0)$ überein. $x = a$ ist also doppelte Nullstelle von $P(x)$, und $P(x)$ besitzt daher die Zerlegung $P(x) = (x - a)^2(x - b)(x - c)$ in Linearfaktoren, wobei $c \in \{a, b\}$. Da an b die Tangenten nicht übereinstimmen sollen, ist b eine einfache Nullstelle.

Für $c = a$ folgt aus dem Satz von Vieta:

$$\begin{aligned} 3a + b = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad & b = -3a \\ 3a^2 + 3ab = -6a^2 = 1 - 2y_0 &\quad\Leftrightarrow\quad & y_0 = 3a^2 + \frac{1}{2} \\ 3a^2b + a^3 = -8a^3 = 2x_0 &\quad\Leftrightarrow\quad & x_0 = -4a^3 \\ a^3b = -3a^4 = {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2 &\quad\Leftrightarrow\quad & r = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + 3a^4} \end{aligned}$$

Zu jedem $a \neq 0$ lässt sich also ein Kreis $K_r(x_0, y_0)$ bestimmen, der die Parabel in genau zwei Punkten $A = (a, a^2)$ und $B = (b, b^2)$ schneidet, wobei in A die Tangenten an Kreis bzw. Parabel übereinstimmen und in B nicht, da b keine doppelte Nullstelle von $P(x)$ ist.

Beispiel: Der Kreis habe seinen Mittelpunkt bei $M = \left(-4, \frac{7}{2}\right)$ und den Radius $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. Die Schnittpunkte sind dann $A = (1, 1)$ und $B = (-3, 9)$, wobei Kreistangente und Parabeltangente in A übereinstimmen und in B nicht übereinstimmen.



□

Aufgabe 6 Ein Zauberer hat die Aufgabe, von einem Stapel aus 36 Karten (9 Kreuz, 9 Pik, 9 Herz und 9 Karo) die „Farbe“ (Kreuz, Pik, Herz oder Karo) jeweils der obersten Karte, von der er natürlich nur die Rückseite sieht, vorauszusagen. Nachdem er sich geäußert hat, wird ihm die Karte umgedreht gezeigt und zur Seite gelegt. Die Rückseiten der Karten sind allerdings nicht symmetrisch. Die Karten werden gemischt und von einem eingeweihten Assistenten präpariert, indem er jede Karte zwar verdrehen, sie aber nicht in ihrer Reihenfolge verändern kann. Das System, nach dem die Karten verdreht sind, ist natürlich vorher zwischen dem Zauberer und seinem Assistenten abgesprochen worden. Kann der Zauberer nun

(a) **(3 P.)** in mehr als der Hälfte der Karten die „Farbe“ richtig bestimmen?

(b) **(5 P.)** bei nicht weniger als 20 Karten die „Farbe“ richtig bestimmen?

Lösung (a) Durch den zweiten Teil bereits gelöst.

(b) Den Farben seien die Zahlen 0, 1, 2 und 3 zugeordnet.

Erste Karte: Die gegebene Lage entspreche 0; die gedrehte Lage 1.

Zweite und Dritte Karte: Binärdarstellung der Farbe die unter den 17 Karten 3 und 4, 6, 8, … und 34 am häufigsten (mindestens also fünfmal) auftritt.

$(2i)$-te und $(2i+1)$-te Karte ($i = 2, 3, \ldots, 17$): Binärdarstellung der Farbe der Karte $2i + 1$.

36-te Karte: Die Farbe ist bekannt.

Insgesamt wird so die Farbe von $5 + 16 + 1 = 22$ Karten richtig bestimmt.

Hierbei wurde davon ausgegangen, dass der Zauberer den Stapel nicht in einer bestimmten Orientierung übergeben bekommt, weshalb die erste Karte benutzt werden muss, um diese festzustellen. Anderenfalls kann man alles um einen nach vorne verschieben und die 35-te Karte noch verwenden, um mitzuteilen, ob die Nummer der Farbe derselben größer ist als die der 36-ten, womit man noch eine weitere Karte gewinnt. □

Fragen und Anmerkungen Schicken Sie diese bitte an Prof. Dr. Helmut Müller <mueller@math.uni-hamburg.de>. An den Lösungen haben außerdem mitgewirkt: Lilian Matthiesen, Klaus Sielaff, Jakob Söhl, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.