25. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 14. November 2003

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [3 Punkte]

Die Außenflächen einer rechtwinkligen Schachtel mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 cm sind in lauter Quadrate der Seitenlänge 1 cm aufgeteilt. Kann man in jedes Quadrat eine Zahl so schreiben, dass die Summe der Zahlen entlang eines beliebigen Streifens der Breite 1, der die Schachtel kantenparallel genau einmal umläuft, stets 120 ergibt?

Aufgabe 2: [4 Punkte]

In dem Siebeneck $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ seien die Diagonalen $A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_1$ und A_7A_2 alle gleich lang. Ebenso seien die Diagonalen $A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_1, A_6A_2$ und A_7A_3 alle gleich lang. Muss dann das Siebeneck regelmäßig sein?

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Von jeder Zahl m mit $n + 1 \leq m \leq 2n$, n eine natürliche Zahl, nehmen wir den größten ungeraden Teiler. Addieren wir alle diese Teiler auf, so ergibt sich stets n^2. Warum?

Aufgabe 4: [4 Punkte]

N Punkte in der Ebene, wobei keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen, werden durch Strecken verbunden (jeder Punkt mit jedem anderen Punkt). Ein Teil der Strecken wird rot, der Rest blau gefärbt. Die roten Strecken bilden eine geschlossene Kurve ohne Selbstschnittpunkte, d.h. jede Strecke hat nur an seinen Endpunkten mit den beiden Nachbarstrecken Punkte gemein und sonst keine gemeinsamen Punkte mit irgendeiner anderen roten Strecke. Die blauen Strecken haben die gleiche Eigenschaft. Bestimme alle Zahlen N, für die es eine derartige Zerlegung in rote und blaue Strecken gibt.

Aufgabe 5: [5 Punkte]

Auf einem $1 \times N$ Spielfeld sind die ersten 25 (von links gesehen) Felder mit je einem Stein besetzt. Diese Steine denke man sich entsprechend ihrem Feld von 1 bis 25 durchnummeriert. Jeder Stein kann nun auf das rechte Nachbarfeld gehen (sofern es frei ist) oder über den nächsten Stein rechts von ihm springen, sofern das übernächste Feld frei ist. Nach links können sich die Steine nicht bewegen. Welches ist das kleinste N, so dass alle 25 Steine wieder hintereinander liegen können, aber in umgekehrter Reihenfolge?

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. **Viel Erfolg !**