

20. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, Herbst 1998

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [3 P.]

Ein Würfel mit der Kantenlänge 20 ist aus 8000 sich nicht überschneidenden Einheitswürfeln zusammengesetzt. In jeden der Einheitswürfel wird eine Zahl geschrieben. Betrachtet man die zwanzig Würfel irgendeiner Reihe parallel zu den Würfelkanten, so ist die Summe aller hier eingetragenen Zahlen 1. In irgendeinem Einheitswürfel steht die Zahl 10. Durch ihn verlaufen drei Würfelscheiben parallel zu den Würfelflächen. Wie groß ist die Summe aller Zahlen in diesen drei Scheiben?

Aufgabe 2: [3 P.]

Die Dezimaldarstellung einer Quadratzahl endet mit $\dots 09$. d.h. die letzten beiden Ziffern sind 0 und 9. Zeige, daß dann die drittletzte Ziffer stets gerade sein muß.

Aufgabe 3: [4 P.]

In einem Dreieck ABC ist echt zwischen den Punkten B und C ein Punkt A' gewählt, ebenso zwischen A und B ein Punkt C' und B' zwischen A und C . Es gelten ferner die Winkelbeziehungen $\angle AC'B' = \angle B'A'C$, $\angle CB'A' = \angle A'C'B$ und $\angle BA'C' = \angle C'B'A$. Zeige, daß dann A' , B' und C' die Mittelpunkte der betreffenden Dreiecksseiten sind.

Aufgabe 4: [4 P.]

Zwölf Kandidaten für die Wahl eines Bürgermeisters nehmen an einer Talkshow teil. Plötzlich sagt ein Kandidat: „Bis jetzt ist (genau) einmal gelogen worden“. Daraufhin sagt ein weiterer Kandidat: „Bis jetzt ist (genau) zweimal gelogen worden“. „Nun dreimal!“ erwidert ein dritter. Dies geht so weiter, bis schließlich der letzte Kandidat sagt: „Bis jetzt ist (genau) zwölfmal gelogen worden“. Daraufhin bricht der Talkmaster die Show ab. Später stellt sich heraus, daß mindestens ein Kandidat die exakte Anzahl der Lügen beschrieben hat. Wie viele Kandidaten haben wirklich gelogen?

Aufgabe 5: [5 P.]

Auf einem unendlich großen Schachbrett kann eine Figur n Felder in eine Richtung (senkrecht oder waagrecht) und dann m Felder in eine dazu senkrechte Richtung ziehen. Eine solche Figur heißt ein (n, m) -Krokodil. Beweise, daß man bei vorgegebenen ganzen Zahlen n und m die Schachbrettfelder so schwarz und weiß färben kann, daß ein (n, m) -Krokodil von einem weißen Feld stets auf einem schwarzen Feld landet und umgekehrt.

An Hilfsmittel sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Lineal und Zirkel zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg !