Beweismethoden I

Aufgabe 1
Geben Sie für folgende Aussagen jeweils einen direkten Beweis.

(a) Zwischen je zwei rationalen Zahlen $a < b$ existiert eine weitere rationale Zahl.

(b) Eine ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer '5' endet, ist durch 5 teilbar.

(c) Für natürliche Zahlen $m < n$ gilt $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$.

Aufgabe 2
Beweisen Sie folgende Aussagen indirekt (d.h. mit Hilfe der Kontraposition).

(a) Ist die Summe zweier reeller Zahlen irrational, so ist mindestens eine der beiden Zahlen irrational.

(b) Ist x eine irrationale Zahl, so ist auch $\sqrt{x}$ eine irrationale Zahl.

Aufgabe 3
Suchen Sie sowohl einen direkten Beweis als auch einen Beweis durch Widerspruch für folgende Aussage:

Zwischen 0 *und* 1 *gibt es unendlich viele rationale Zahlen.*

Aufgabe 4
Es sei X eine Menge, und A und B seien Teilmengen von X. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender drei Aussagen:

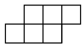
- $A \subseteq B$.
- $A \cap (X \setminus B) = \varnothing$.
- $(X \setminus A) \cup B = X$.

Aufgabe 5
Ist es möglich, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (paarweise verschiedene) Punkte $P_1, \ldots, P_n$ und eine Gerade g so in die Ebene zu legen, dass g durch keinen der Punkte P_i verläuft, aber die Verbindungsstrecken P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{n-1}P_n$ sowie P_nP_1 schneidet? Betrachten Sie einige Beispiele, stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 6
Stellen Sie eine Vermutung über die Gültigkeit der Aussage „Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist n^2+n+41 eine Primzahl." auf. Geben Sie einen Beweis oder ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 7

Wir betrachten die Menge $\mathcal{F}$ aller zusammenhängenden Figuren aus endlich vielen Quadraten gleicher Größe, welche jeweils wie im Bild an Kanten aneinander liegen.



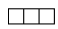
Geben Sie für jede der 12 möglichen Implikationen der Form

$$\forall\, F \in \mathcal{F} \,:\, A_i(F) \implies A_j(F)$$

zwischen den folgenden 4 Aussagen entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(A_1) Die Anzahl der Quadrate der Figur $F \in \mathcal{F}$ ist 3.

(A_2) Die Anzahl der Quadrate der Figur $F \in \mathcal{F}$ ist durch 3 teilbar.

(A_3) Die Figur $F \in \mathcal{F}$ lässt sich aus Steinen der Form  zusammensetzen.

(A_4) Die Figur $F \in \mathcal{F}$ lässt sich aus Steinen der Form  zusammensetzen.

Aufgabe 8 **(a)** Geben Sie ein Beispiel einer Summe aus zwei irrationalen Zahlen an, die rational ist.

(b) Ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rational oder irrational? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Beweisen Sie, dass es unter drei beliebigen irrationalen Zahlen stets zwei gibt, deren Summe ebenfalls irrational ist.

Aufgabe 9

Auf dem Tisch liegen 100 Karten verdeckt in einer Reihe. Jetzt werden die Karten an den Positionen $2, 4, 6, \ldots$ umgedreht. Dann werden die Karten an den Positionen $3, 6, 9, \ldots$ umgedreht (die Karte an Position 6 ist dann also wieder verdeckt), dann die Karten an den Positionen $4, 8, 12, \ldots$ usw. (d.h. im k-ten Zug werden alle Karten an den Positionen k, $2k$ $3k$,... umgedreht), bis in der letzten Runde nur noch die Karte an Position 100 umgedreht wird. Welche Karten sind am Schluss verdeckt?

Aufgabe 10 **(a)** Beweisen Sie: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Zahl selbst durch 3 teilbar ist.

(b) Ist diese Aussage auch für andere Teiler als 3 wahr?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass alle reellen Lösungen der Gleichung $x^5 - 2x^3 - 3 = 0$ kleiner als 2 sind. Versuchen Sie das Resultat auch für eine bessere Schranke als 2 zu beweisen.

Aufgabe 12

Beweisen Sie, dass sowohl $\sqrt[3]{2}$ als auch $\log_2(3)$ irrationale Zahlen sind. Verallgemeinern Sie dieses Resultat und beweisen Sie Ihre Verallgemeinerung.