Differentialrechnung

Aufwärmübung

Verifizieren Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass die Geradengleichung der Sekante an den Graphen der Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ die folgende Form hat:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Aufgabe 1 **(a)** Beweisen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion), dass es zu beliebig vorgegebenen reellen Zahlen a_1,a_2, ..., a_{n+1} ein Polynom p vom Grad höchstens n gibt, so dass für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n + 1$ die Werte des Polynoms durch $p(k) = a_k$ gegeben sind.

(b) Was sagt diese Aussage über „Intelligenztest"-Fragen vom Typ *„Wie lautet das nächste Glied in der Folge* 2,3,5,7,11,*... ?"*?

Aufgabe 2

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Funktionen an, und berechnen Sie ihre Ableitungen. Welche Regeln haben Sie dabei verwendet?

(a) $(x + 3)^6$

(b) $x^3 + 6x^2 - \frac{2}{3x}$

(c) $\tan(x)$

(d) $\cot(x)$

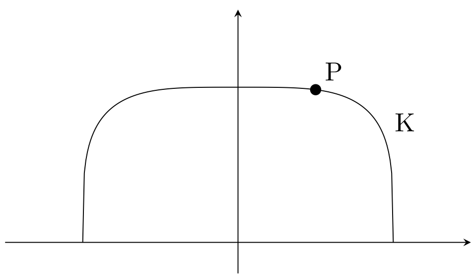
(e) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(f) $e^{\frac{x^2}{2}} - \ln(\cos^2(3x)) + 2$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten im Punkt $P = (1/2, \frac{\sqrt[4]{15}}{2})$ an die Kurve K, wobei

$$K = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}\,.$$



Tipp: Beschreiben Sie die Kurve in der Nähe des Punktes P als Graph einer Funktion.

Aufgabe 4

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

durch, d.h. untersuchen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, Extrema, Wendepunkte und das asymptotische Verhalten der Funktion in der Nähe der Nullstellen des Nenners. Fertigen Sie anhand dieser Informationen eine Skizze des Funktionsgraphen an.

Aufgabe 5

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$. Beweisen Sie auch, das $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nicht existiert (insbesondere ist f' in $x = 0$ also nicht stetig).

Aufgabe 6

Wo ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$ differenzierbar und wo nicht?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = |x| \sin(x)$ an der Stelle 0 mit Hilfe des Differentialquotienten. In welchen Punkten x ist f differenzierbar?

Aufgabe 8

Welches ist unter den Rechtecken mit fest vorgegebenem Umfang $U > 0$ das mit dem größten Flächeninhalt? Finden Sie auch einen Beweis Ihrer Behauptung ohne Differentialrechnung?