Beweismethoden II

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, das heißt die Summe

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)\,.$$

Berechnen Sie die Summe für einige natürliche Zahlen n. Erkennen Sie eine Regelmäßigkeit? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2 **(a)** Wie viele Faltkanten entstehen (theoretisch), wenn man einen rechteckigen Papierstreifen n mal (immer wieder in der Mitte parallel zur kurzen Seite) faltet?

(b) Und wie groß kann n in der Praxis tatsächlich werden, wenn der Streifen ca. 1m lang und ca. 0.2mm dick ist?

Aufgabe 3

Was geht schief bei folgendem Induktionsbeweis?

> **Satz.** Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
> **Beweis.** Wir zeigen Folgendes: Falls für eine natürliche Zahl m gilt $\max\{a, b\} = m$, dann folgt $a = b$, wobei a und b natürliche Zahlen sind. Aus dieser Behauptung folgt dann offenbar die Aussage unseres Satzes.
>
> Wir führen einen Induktionsbeweis über m durch.
> **Induktionsanfang:** Es sei $m = 1$. Also ist $\max\{a, b\} = 1$. Dies impliziert, dass $a = b = 1$, weil a und b natürliche Zahlen sind.
> **Induktionsvoraussetzung:** Für ein gegebenes m sei die Behauptung schon bewiesen.
> **Induktionsschritt:** Wir nehmen an, dass $\max\{a, b\} = m+1$. Daraus folgt, dass $\max\{a - 1, b - 1\} = m$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt also $a - 1 = b - 1$. Wenn wir nun zu beiden Seiten dieser Gleichung 1 addieren, so erhalten wir $a = b$. $\square$

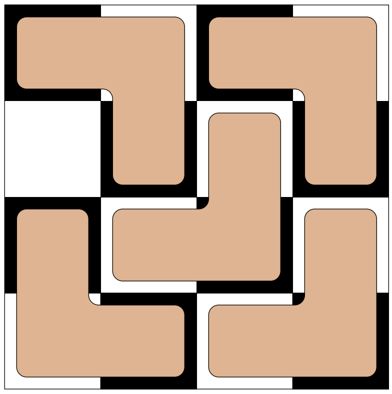
Aufgabe 4

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\sum_{r=1}^{n} r\right)^2 .$$

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie ein quadratisches Schachbrett der Seitenlänge 2^n, aus dem ein beliebiges Feld entfernt wurde. Beweisen Sie, dass es für jedes n möglich ist, das Schachbrett (bis auf das entfernte Feld) mit L-förmigen Kacheln zu überdecken. Eine L-förmige Kachel belegt dabei stets drei Felder. Hier folgt noch ein Beispiel einer Überdeckung eines Schachbretts mit Seitenlänge 4.



Aufgabe 6

Es seien $x_1 = 0, x_2 = 1$ und für $n \geq 2$ sei $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$. Beweisen Sie, dass

$$x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^{n-2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis. Wählen Sie eine gute Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 7

Beweisen Sie, das für jede Anzahl k außer 2, 3 oder 5 ein Quadrat in genau k nichtüberlappende Teilquadrate zerlegt werden kann (welche unterschiedlich groß sein dürfen).

Aufgabe 8

In wie viele Teilgebiete kann eine Ebene durch n Geraden ***maximal*** zerlegt werden? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die ***maximale*** Anzahl der Gebiete, in die eine Kreisscheibe zerlegt wird, wenn man zwischen n Punkten auf ihrem Rand alle paarweisen Verbindungsstrecken einzeichnet.

Hinweis. Bestimmen Sie diese Anzahl zunächst für $n = 2, 3, 4, 5$ und stellen Sie eine Vermutung auf. Bestimmen Sie sie auch für $n = 6$. Finden Sie eine allgemeine Formel und beweisen Sie diese.