

Stetigkeit

Aufgabe 1

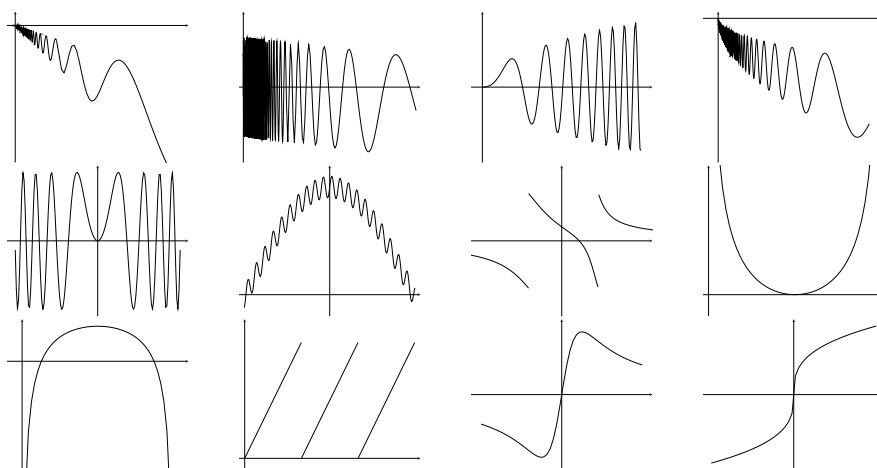
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition von Stetigkeit aus der Vorlesung, dass für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert als

$$f_c(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x + c & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ genau dann stetig ist, wenn $c = 0$.

Aufgabe 2

Das folgende Bild zeigt 12 Funktionsgraphen.



Wir betrachten andererseits die folgende Liste von Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, wobei überall dort, wo der jeweilige Ausdruck nicht sinnvoll ist (z.B. weil durch 0 dividiert würde) die Funktionen den Wert 0 haben sollen:¹

- $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x$, $A = [0, \frac{1}{5}]$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = [-1, 1]$
- $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $A = [-4, 4]$
- $f(x) = x - [x]$, $A = [0, 3]$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} - 1$, $A = [0, \pi]$
- $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\sqrt{x}$, $A = [0, \frac{1}{10}]$
- $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$, $A = [0, 7]$
- $f(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $A = [0, 1]$
- $f(x) = \sin(x^2)$, $A = [-5, 5]$
- $f(x) = \sin\left(\frac{5}{x}\right) - x$, $A = [0, \frac{2}{5}]$

¹ $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ ist die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist, und $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(40x)$, $A = [-\frac{8}{5}, \frac{8}{5}]$
- $f(x) = \arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-\frac{1}{10}x-1}\right)$, $A = [-5, 5]$

- (a) Bestimmen Sie, welcher Funktionsgraph zu welcher Abbildung gehört.
- (b) Welche der angegebenen Funktionen sind stetig auf A ? Finden Sie für nicht stetige Funktionen jeweils die Unstetigkeitsstellen.
- (c) Ändert sich die Antwort, wenn man statt einem abgeschlossenen Intervall jeweils das offene Intervall betrachtet?
- (d) Welche der Funktionen besitzen in A einen maximalen Wert? Welche besitzen in A einen minimalen Wert?
- (e) Für die meisten der gegebenen Funktionen liegt das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ im Definitionsbereich. Welche der Funktionen sind in diesem Intervall injektiv? Können Sie das Bild $f([0, \frac{1}{2}])$ bestimmen?
- (f) Stellen Sie sich alle Funktionen mit der jeweiligen Regel (nicht sinnvolle Ausdrücke werden durch 0 ersetzt) auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vor. Welche dieser Fortsetzungen sind dann surjektiv?