Grenzwerte

Aufgabe 1

Lesen Sie noch einmal Ihre Notizen zur heutigen Vorlesung durch, und formulieren Sie mindestens drei Fragen zum Thema: Wo blieben noch Punkte offen? Was ging zu schnell? Welche weiterführenden Fragen interessieren Sie? Bringen Sie Ihre Fragen morgen mit ins Tutorium!

Aufgabe 2

In der Vorlesung haben wir definiert, was es für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen bedeutet, gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ zu konvergieren. Beweisen Sie auf der Grundlage dieser Definition, dass jede Folge reeller Zahlen *höchstens* einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 3

Die Folge $(\frac{4}{\sqrt[3]{n}})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen sie für $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \frac{1}{10}$ und $\epsilon_3 = \frac{1}{1000}$ jeweils geeignete natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3, so dass für alle $n > n_k$ die Abschätzung

$$\left|\frac{4}{\sqrt[3]{n}}\right| < \epsilon_k.$$

Aufgabe 4 **(a)** Gegeben seien zwei Folgen reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir nehmen an, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$|a - x_n| \leq |y_n|$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Aufgabe 5

Ein *endlicher Kettenbruch* ist ein Ausdruck der Form

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad (n \text{ Divisionen}),$$

wobei die a_k natürliche Zahlen sind.

(a) Zeigen Sie, dass jede rationale Zahl $\frac{p}{q} > 1$ eine Darstellung als endlicher Kettenbruch besitzt.

Wir definieren $t_0 = 1$ sowie $t_n = [1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ Einsen}}]$ für $n \geq 1$.

(b) Bestimmen Sie die ersten Folgenglieder $t_1, \dots, t_4$.

(c) Nehmen Sie an, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert a.

(d) Beweisen Sie die Abschätzung

$$|a - t_{n+1}| \leq \frac{|a - t_n|}{a t_n} < \frac{|a - t_n|}{a}$$

und folgern Sie daraus

$$|a - t_{n+1}| < \frac{|a - t_1|}{a^n},$$

so dass die Folge in der Tat konvergiert (warum?).

Analog zu den endlichen Kettenbrüchen definieren wir für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen den *unendlichen Kettenbruch*

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] := \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

als Grenzwert der zugehörigen Folge endlicher Kettenbrüche (die Konvergenz der Folge endlicher Kettenbrüche ist nicht offensichtlich - wir nehmen sie hier aber an). Wir haben also zum Beispiel

$$a = [1; 1, 1, \dots].$$

Man kann beweisen, dass jede irrationale Zahl $x > 1$ eine unendliche Kettenbruchentwicklung besitzt.

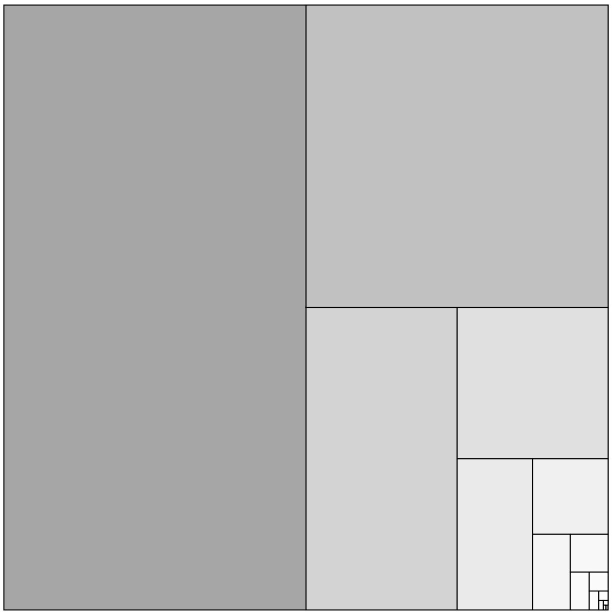
(e) Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Kettenbruchentwicklung von $x = \sqrt{2}$. (*Tipp: Hilft Ihnen die Gleichung* $\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ *?*).

(f) Welcher irrationalen Zahl x entspricht der unendliche Kettenbruch $[1; 1, 2, 1, 2, , \dots]$? (*Tipp: Stellen Sie eine Gleichung für* $x - 1$ *auf.*)

Aufgabe 6 **(a)** Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \quad = 1.$$

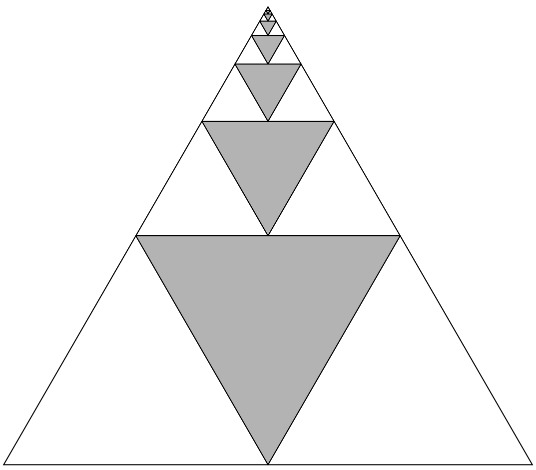
Das folgende Bild soll dies beweisen - können Sie den Beweis erklären?



(b) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots \quad = \frac{1}{3}.$$

Das folgende Bild soll dies beweisen - können Sie den Beweis erklären?



(c) Finden Sie noch andere solche Bildbeweise für Reihenberechnungen?

Aufgabe 7

Konvergiert die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$?