Abbildungen und Funktionen

Aufwärmübung

Es seien $M_1 = \{1,2,3,4\}$, $M_2 = \{2,7,8,10\}$, $M_3 = \{1,3,10\}$ und $M_4 = \{2,3,8\}$. Bestimmen Sie

(a) $((M_1 \cup M_2) \cap M_3) \setminus M_4$

(b) $(M_1 \cup (M_2 \cap M_3)) \setminus M_4$

(c) $(M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)) \cup M_4$

(d) $(M_1 \cap M_2) \cup (M_3 \cap M_4)$

Aufgabe 1

In der Vorlesung hatten wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M als die Menge aller Teilmengen von M definiert. In dieser Aufgabe betrachten wir eine Funktion auf

$$\mathcal{P}'(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}.$$

Wir nehmen als bekannt an, dass jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element (bezüglich der Ordnung $<$ der natürlichen Zahlen) besitzt, und definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} K : \mathcal{P}'(\mathbb{N}) &\to \mathbb{N} \\ K(M) &= \text{ das kleinste Element von } M. \end{aligned}$$

(a) Warum haben wir $\mathcal{P}'(\mathbb{N})$ und nicht $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als Definitionsbereich von K benutzt?

(b) Was ist das Bild der Funktion K?

(c) Beschreiben Sie das Urbild unter K von $1 \in \mathbb{N}$ und das Urbild von $3 \in \mathbb{N}$. Was ist allgemein das Urbild von $n \in \mathbb{N}$?

(d) Beweisen Sie die Beziehung $K(M \cup N) = \min(K(M), K(N))$ für alle $M, N \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$.[1]

(e) Wir nehmen an, dass $M \cap N \neq \varnothing$. Gilt dann $K(M \cap N) = \max(K(M), K(N))$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

[1] Zur Erinnerung: Die Funktionen min und max sind definiert als

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \max(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aufgabe 2

Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$g(x) = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \}.$$

Meist bezeichnet man $g(x)$ auch mit $\lfloor x \rfloor$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion g sowie der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als $f(x) = x - g(x)$.

(b) Skizzieren Sie nun den Graphen der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als $h(x) = \sin(\pi \cdot f(x))$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = 2x - 3$.

(a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Komposition $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus dem Graphen von f erhält.

(b) Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Komposition $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus dem Graphen von f erhält.

Falls Ihnen diese Fragen Mühe bereiten, so diskutieren Sie zuerst konkrete Beispiele wie $f(x) = x^2$ oder $f(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 4 **(a)** Wie sieht man dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ an, ob sie eine Umkehrfunktion besitzt?

(b) Falls eine solche Funktion eine Umkehrfunktion besitzt, wie erhält man dann den Graphen von $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ aus dem Graphen von f?

(c) Zeichnen Sie mehrere möglichst verschieden aussehende Graphen von invertierbaren Funktionen $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Wieviele Punkte mit $f(x) = x$ kann eine solche Funktion haben? Finden Sie Funktionen mit genau 5 oder genau 6 solchen Punkten?

Aufgabe 5

Skizzieren Sie (ohne elektronische Hilfsmittel) die Graphen der folgenden Funktionen. Welche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist jeweils der maximal mögliche Definitionsbereich? Was ist die Bildmenge?

(a) $f_1(x) = \log_2(x) + 3$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f_3(x) = \cos(\frac{1}{x})$

(d) $f_4(x) = \sin(2x) + x$

(e) $f_5(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4}$

(f) $f_6(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Welche dieser Funktionen sind *auf ihrer Bildmenge* invertierbar?

Aufgabe 6

Versuchen Sie, den Graphen der Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ zu skizzieren. Was ist der maximal mögliche Definitionsbereich dieser Funktion? Welche Werte nimmt sie an? Ist die Zahl 0 im Bild der Funktion f?

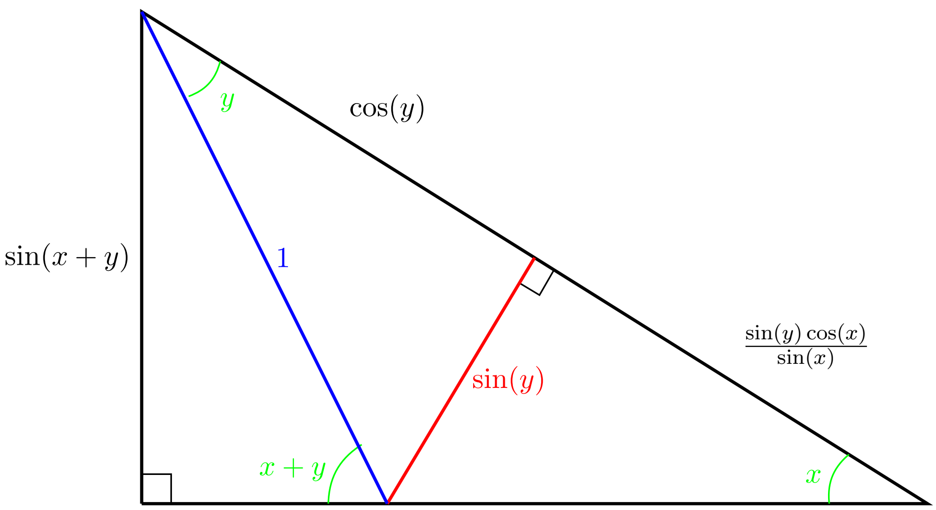
Aufgabe 7

Beweisen Sie mit elementaren Methoden (also insbesondere *ohne Differentialrechnung*), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$ streng monoton ist, d.h. dass aus $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) < f(x_2)$ folgt.

Aufgabe 8 **(a)** Im Internet[2] findet man folgendes Bild, dass den Beweis des Additionstheorems

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

zeigen soll. Können Sie den Beweis erklären?



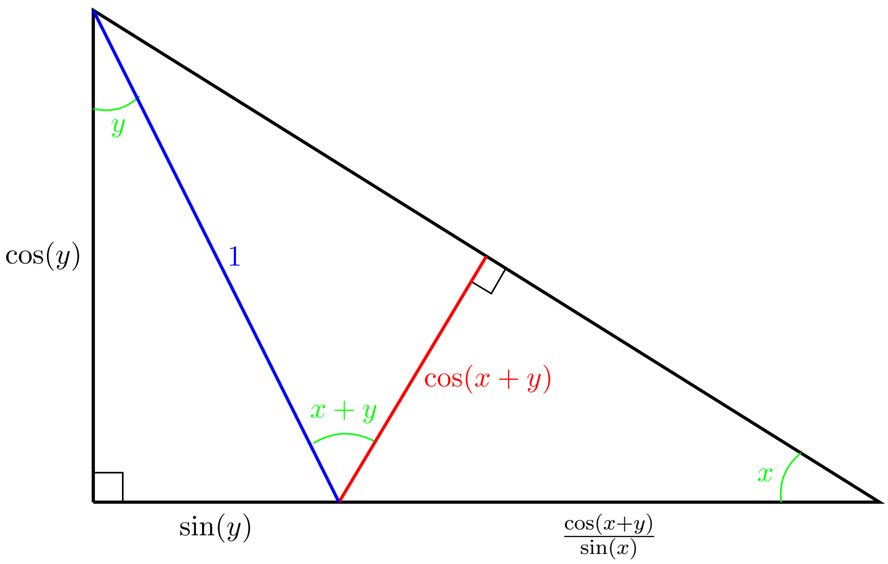
(b) Am gleichen Ort findet man auch folgendes Bild, dass den Beweis des Additionstheorems

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

zeigen soll. Können Sie auch diesen Beweis erklären?

Die Additionstheoreme gelten für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$, wie Sie vermutlich in der Analysis beweisen werden. Unter welchen Annahmen an x und y sind die oben gegebenen Beweise gültig?

[2] `http://math.uaa.alaska.edu/~smiley/trigproofs.html`


y
$\cos(y)$
1
$\cos(x+y)$
$x+y$
x
$\sin(y)$
$\frac{\cos(x+y)}{\sin(x)}$