

Elementares Rechnen

Sie sollten während der Übungsstunde nur wenige Minuten für die Aufwärmübungen verwenden, damit genug Zeit zur Beschäftigung mit den anderen Aufgaben bleibt. Sollten Sie hier Schwierigkeiten haben, so empfehlen wir Ihnen die Online-Lernplattform OMB+ sowie die auf der Webseite zum Vorkurs erwähnten Übungsbücher.

Aufwärmübung

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $(2x + 3)(3x - 4) - (6x + 1)(x + 2)$

(b) $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$

(c) $\frac{a+1}{a} - \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$

Aufwärmübung

Schreiben Sie folgende Ausdrücke ohne Summen- und Produktzeichen und vereinfachen Sie soweit möglich

(a) $\sum_{i=0}^3 i$

(b) $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i}$

(c) $\prod_{i=2}^4 i^2$

(d) $\prod_{i=1}^6 x^2$

Aufgabe 1

Es seien r und s ganze Zahlen, welche größer als null sind.

(a) Überzeugen Sie sich, dass

$$\min\{r, s\} + \max\{r, s\} = r + s.$$

(b) Wie könnte ein formaler Beweis dafür aussehen?

(c) Gilt die Aussage auch allgemeiner?

Aufgabe 2

Der Ausdruck $(x + h)^{100}$ soll ausmultipliziert als Summe geschrieben werden.

(a) Wieviele Summanden enthalten keinen Faktor h ? Wie lauten diese Summanden?

(b) Wieviele Summanden enthalten den Faktor h genau zweimal? Wie lauten diese Summanden?

Aufgabe 3

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 1234 und 432 ohne Taschenrechner.

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl x gilt: $x^3 - x$ ist durch 3 teilbar, und $x^5 - x$ ist durch 5 teilbar.

(b) Können Sie diese Aussage verallgemeinern? Ist $x^n - x$ durch n teilbar?

(c) Zeigen Sie, dass $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 5

Welche Tripel natürlicher Zahlen $a < b < c$ erfüllen

$$\text{ggT}(a, b, c) = 60 \quad \text{und} \quad \text{kgV}(a, b, c) = 2520?$$

Aufgabe 6

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Mit wievielen Nullen endet die Fakultät von 100?

Aufgabe 7

Wieviele Rechtecke mit ganzzahligen Kantenlängen gibt es, für die Umfang und Flächeninhalt denselben Zahlenwert haben? Beschreiben Sie alle Rechtecke mit diesen Eigenschaften.

Aufgabe 8

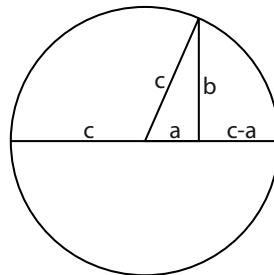
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl $p > 3$ die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.

Aufgabe 9

Es seien a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei c größer als a und als b ist. Es gilt die Formel:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}.$$

Wieso ist das so? Das soll die unten stehende Skizze beantworten. Können Sie diesen Beweis erklären? Kennen Sie diese Formel schon aus der Schule?



Aufgabe 10

Acht gleich große Kreise mit dem Radius r sind so in einer Ebene angeordnet, dass ihre Mittelpunkte ein regelmäßiges Achteck bilden und jeder Kreis seine beiden Nachbarkreise berührt. Ein Quadrat der Seitenlänge a umschließt alle 8 Kreise so, dass jede Quadratseite von zwei Kreisen berührt wird (siehe Abbildung).

- (a) Drücken Sie den Radius r mit Hilfe der Seitenlänge a aus.
- (b) Die 8 Kreise umschließen einen Kreis mit dem Radius R so, dass sie alle diesen Kreis von außen berühren. Berechnen Sie R in Abhängigkeit von r .

