Komplexe Funktionen, SS06, 12.10.2006, (Lauterbach)

Aufgabe 1:

a) Man bestimme Radius und Mittelpunkt des Kreises

$$z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 5\,.$$

b) Man berechne alle Lösungen in kartesischen Koordinaten von

(i) $(w-1)^4 + 4 = 0$,

(ii) $\exp(z) + \exp(1) = 0$.

c) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus bestimme man das Bild des Einheitskreises.

d) Man zeige, dass

$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{z+3}{z^3 - z^2 - 7z + 15}$ definierte Funktion.

a) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f.

b) Man berechne die Residuen aller Singularitäten.

c) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an mit Hilfe von Laurent-Reihenanteilen.

d) Man skizziere die Konvergenzbereiche der verschiedenen Reihenentwicklungen um $z_0 = 0$.

e) Man berechne die Laurent-Reihe um $z_0 = 0$, die im Punkt $z^* = 5$ konvergiert.

f) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z-2+2i|=2} f(z)\,dz\,.$

g) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$