

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

- a) Man bestimme das Bild von

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \ln 4, 0 \leq \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \sqrt{e^z}$ definierten Abbildung, wobei \sqrt{w} der Hauptwert der Wurzelfunktion ist.

- b) Man berechne

- (i) $\ln(-3i)$,
- (ii) $\ln(-1 - i)$,
- (iii) $\ln(-3i) + \ln(-1 - i)$
- (iv) $\ln(-3i(-1 - i))$

und diskutiere allgemein für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2),$$

wobei $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus ist.

Aufgabe 6:

Die komplexen Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}).$$

- a) Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sinh z$ und $\cosh z$.
- b) Man zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten

$$\sinh z = \frac{1}{i} \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

- c) Man bestimme alle Lösungen von $\cosh z = 0$.

Aufgabe 7:

a) Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

- (i) der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 2$,
- (ii) des Strahls $\operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0$,
- (iii) des Kreises $|z| = 3$,
- (iv) des Kreises $|z - 2i| = 2$ und
- (v) des Kreises $|z - 2i| = 1$.

b) Man berechne die Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch liegen zu beiden Kreisen

$$K_1 : |z - 2i| = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad K_2 : |z + 2i| = \sqrt{6}.$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z - 3i}{z + 3i}.$$

- a) Definiert T eine Möbius-Transformation?
- b) Wie lautet die Umkehrabbildung?
- c) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse.
- d) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z| = 3$.
- e) Bestimmen Sie das Bild der reellen Achse.
- f) Welches ist das Bild von $M := \{z = x + iy : |z| < 3; \operatorname{Re}(z) = x > 0\}$. Fertigen Sie eine Skizze an.

Abgabetermin: 2.05.2006 (zu Beginn der Übung)