

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

- a) Der Punkt $z = x + iy$ besitze das sphärische Bild $Z = (X_1, X_2, X_3)$ auf der Riemannschen Zahlenkugel. Geben Sie die Bilder der Punkte \bar{z} , $-z$, $-\frac{1}{\bar{z}}$ an.
- b) Das sphärische Bild des echten Kreises

$$C := \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} - R^2 = 0\}$$

auf der Riemannkugel sei ein Kreis mit Radius 1. Zeigen Sie, dass dann $R^2 = |c|^2 + 1$ gilt.

Aufgabe 2:

- a) Welche der folgenden Funktionen bzw. deren stetige Fortsetzungen sind im Nullpunkt komplex differenzierbar? Welche der im Nullpunkt differenzierbaren Funktionen ist in einer ganzen Umgebung des Nullpunktes differenzierbar?

$$f_1(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z), \quad f_2(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$$

$$f_3(z) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2 - (\operatorname{Im}(z) + 2)^2 + i[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(z) + 4) + \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 4)] \cdot$$

- b) Bestimmen Sie alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit

$$(i) \operatorname{Re}(f(z)) = 3 \quad (ii) \operatorname{Re}(f(z)) = k \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Aufgabe 3: Die ebene Umströmung eines Zylinders mit der Querschnittsfläche

$$K := \{z \in \mathbb{C} ; |z + \frac{i}{2}| \leq 1 \text{ und } |z - \frac{i}{2}| \leq 1\}$$

soll für ein stationäres, wirbel- und quellenfreies Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Rückführung des Problems auf die Umströmung eines Kreiszyinders mit Radius 1 untersucht werden. Geben Sie eine Abbildung an, die das Innere von K bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

Aufgabe 4: Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert. Bestimmen sie das induzierte elektrostatische Potential und die Feldstärke außerhalb der Kreisscheiben.

Tip: Bilden Sie die Kreise auf parallele Geraden ab.

Abgabetermin: 10.05.05