

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 12} dx,$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^3} dx, \quad \text{und}$$

$$\text{c) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Aufgabe 22:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1).$$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ bzw. $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{für } -1 \leq t \leq 1, \\ 2 & \text{für } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

- a) Man berechne zu f die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ und überprüfe deren Stetigkeit in $\omega = 0$.
- b) Man berechne die Inverse-Fouriertransformierte zu

$$F(\omega) = 2i \left(\frac{\omega e^{-2i\omega} - \sin \omega}{\omega^2} \right)$$

unter Verwendung von

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi i & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ -\pi i & \text{für } \alpha < 0 . \end{cases}$$

und ohne das Ergebnis aus a).

Aufgabe 24:

Unter Verwendung der inversen Fourier-Transformation berechne man für $a > 0$ den Cauchy-Hauptwert von:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega .$$

Hinweis: Man verwende die zu $F(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$ gehörige Originalfunktion.

Abgabetermin: 13.7.2004