Differentialgleichungen II, WS06/07, 21.02.2007, (Lauterbach)

Aufgabe 1:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreisring

$$
\begin{aligned}
r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 2 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,, \\
u(r,0) &= 0 = u\left(r, \tfrac{\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad 1 \le r \le 2\,, \\
u(1,\varphi) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\
u(2,\varphi) &= 15\sin(2\varphi) - 255\sin(4\varphi).
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die sich aus dem Produktansatz ergebenden Resultate dürfen verwendet werden.

Aufgabe 2:

Das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung sei gegeben.

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 4\,,\ 0 < t\,, \\
u(0,t) &= 1 = u(4,t) && \text{für} \quad 0 \le t\,, \\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le 4\,.
\end{aligned}
$$

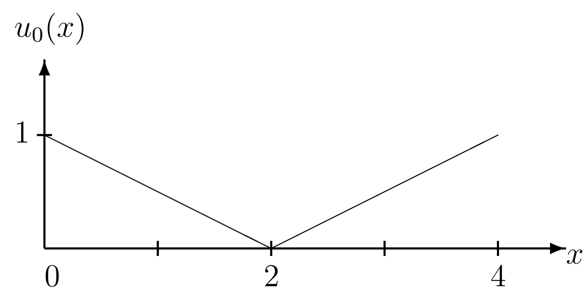

Bild Anfangsfunktion u_0

a) Man bestimme $u_0(x)$.

b) Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.

c) Man löse das transformierte Problem in v.

   Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

d) Man gebe die Lösung u an.

e) Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0,4] \times [0,\infty[$.