Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 25:

Man löse das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 0\,, & x \in \mathbb{R}_+\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) & = & v_0(x)\,, & \\ u(0,t) & = & 0\,, & t > 0 \end{array}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

a) $u_0(x) = x, \quad v_0(x) = x^2$,

b) $u_0(x) = \sin x, \quad v_0(x) = 1$.

Lösung:

Die Reflexionsmethode setzt die Anfangsfunktionen ungerade fort, so dass man ein reines Anfangswertproblem mit ungeraden Anfangsfunktionen erhält, auf dass dann die d'Alembertsche Lösungsformel angewendet wird.

Die resultierende Lösungsformel lautet:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)\,dy & , \quad t \leq x \\ \dfrac{1}{2}\left(u_0(x+t) - u_0(t-x)\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{x+t} v_0(y)\,dy & , \quad x < t \end{cases}$$

a) Bei der zu berechnenden Lösung handelt es sich um eine C^2-Funktion, denn $u_0(x)$ ist bereits ungerade, also mit seiner ungeraden Fortsetzung identisch, und eine C^2-Funktion und die ungerade Fortsetzung von $v_0(x)$ ist eine C^1-Funktion.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left((x+t)+(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} y^2\,dy & , \quad t \le x \\ \frac{1}{2}\left((x+t)-(t-x)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} y^2\,dy & , \quad x < t \end{cases} \\
&= \begin{cases} x+\left.\frac{y^3}{6}\right|_{x-t}^{x+t} = x+x^2t+\frac{t^3}{3} & , \quad t \le x \\ x+\left.\frac{y^3}{6}\right|_{t-x}^{x+t} = x+xt^2+\frac{x^3}{3} & , \quad x < t \end{cases}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} dy & , \quad t \le x \\ \frac{1}{2}\left(\sin(x+t)-\sin(t-x)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} dy & , \quad x < t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sin(x)\cos(t)+t & , \quad t \le x \\ \sin(x)\cos(t)+x & , \quad x < t \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Lösung u ist im Dreieck $0 < t < x$ eine C^2-Funktion, entsprechendes gilt im Dreieck $0 < x < t$.

Auf der Diagonalen $x = t$ liegt jedoch nur Stetigkeit vor. Schon

$$
u_x(x,t) = \begin{cases} \cos(x)\cos(t) & , \quad t < x \\ \cos(x)\cos(t)+1 & , \quad x < t \end{cases}
$$

ist dort unstetig. Der Grund liegt darin, dass die ungerade Fortsetzung $\tilde{v}_0$ von v_0 die aus der d'Alembertsche Lösungsformel ablesbaren Differenzierbarkeitseigenschaften $\tilde{v}_0 \in C^1(\mathbb{R})$ speziell für $x = 0$ nicht besitzt.

Aufgabe 26:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung mittels Produktansatz:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(1,t)\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{x(1-x)}{2}\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(1,t) = X(1) \cdot T(t)$$

liefern $\quad X(0) = 0 = X(1)\,.$

Die gewöhnliche Randwertaufgabe für X besitzt damit nur die nichttrivialen Lösungen

$$X_k(x) = \sin(k\pi x) \quad \text{mit} \quad \lambda_k = k^2\pi^2\,.$$

Setzt man $\lambda_k = k^2\pi^2$ in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\right)\,.$$

Mit den noch nicht verwendeten Anfangsbedingungen werden die fehlenden Koeffizienten a_k und b_k bestimmt:

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \sin(k\pi x) \quad \Rightarrow \quad b_k = 0$$

$$\frac{x(1-x)}{2} = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

Damit können a_k als Fourierkoeffizienten berechnet werden:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{2}\int_0^1 \frac{x(1-x)}{2}\cdot\sin(k\pi x)\,dx \\
&= -\,x(1-x)\cdot\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_0^1 + \int_0^1 (1-2x)\cdot\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx \\
&= (1-2x)\cdot\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\,dx \\
&= -\frac{2\cos(k\pi x)}{k^3\pi^3}\bigg|_0^1 = \frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3}
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet mit $k = 2n-1$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\cdot\sin((2n-1)\pi x)\sin((2n-1)\pi t)\,.$$

Aufgabe 27:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell}\sin t - \frac{x}{\ell}\cos t\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \ell \text{ und } t > 0,\\
u(0,t) &= \sin t\,,\\
u(\ell,t) &= \cos t\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,,\\
u(x,0) &= \frac{x}{\ell}\,,\\
u_t(x,0) &= 1 - \frac{x}{\ell}\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \ell
\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

<u>1. Schritt</u>
Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) := \sin t \quad \text{und} \quad u(\ell,t) = \varphi_1(t) := \cos t$$

wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell}\sin t - \frac{x}{\ell}\cos t\\
&\quad -\varphi_0''(t) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1''(t) - \varphi_0''(t))\\
&= c^2 v_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\,, \quad \text{für } 0 < x < \ell,\ 0 < t\,,\\
v(x,0) &= u(x,0) - \varphi_0(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(0) - \varphi_0(0)) \;=\; \frac{x}{\ell} - \frac{x}{\ell} \;=\; 0\,, \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell\\
v_t(x,0) &= u_t(x,0) - \varphi_0'(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0)) \;=\; 1 - \frac{x}{\ell} - 1 + \frac{x}{\ell} \;=\; 0\\
v(0,t) &= 0 \;=\; v(\ell,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,.
\end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>
Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= c^2 v_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t\,,\\
v(x,0) &= 0 = v_t(x,0)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \ell\\
v(0,t) &= 0 = v(\ell,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,.
\end{aligned}$$

Das Problem wird gelöst durch $v^* \equiv 0$. Rein rechnerisch ergibt sich dies auch aus der über einen Produktansatz gewonnenen Lösungsdarstellung, die schon die Randbedingungen erfüllt:

$$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen mit anschließendem Koeffizientenvergleich.

<u>3. Schritt</u>
Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad \text{für} \quad 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0 = v_t(x,0)\,, \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \ell \\ v(0,t) &= 0 = v(\ell,t)\,, \quad \text{für } 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Nach der Fourierschen Methode wird für die Lösung in Anlehnung an den 2.Schritt folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) .$$

Die homogenen Anfangsbedingungen führen auf $v_k(0) = 0$ und $\dot{v}_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad f_2(t) = t\,,\ f_k(t) = 0 \text{ sonst}\,.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ der Lösung v^{**} ergeben sich daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben

$$\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 = \dot{v}_k(0)\,.$$

Für $k \neq 2$ ist $v_k \equiv 0$.

Für $k = 2$ erhält man die allgemeine Lösung

$$v_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + \frac{\ell^2 t}{4c^2\pi^2}\,.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgaben, so ergibt sich

$$v_2(t) = \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2} \left(t - \frac{\ell}{2c\pi} \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right)\right) .$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi_0(t) + \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t) \\
&= \sin t + \frac{x}{\ell}(\cos t - \sin t) + \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2}\left(t - \frac{\ell}{2c\pi}\sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) .
\end{aligned}
$$

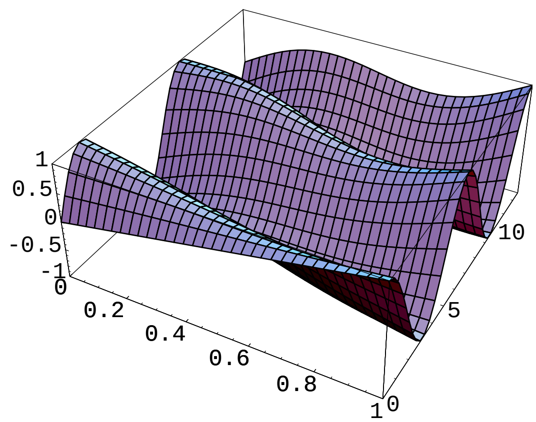

Bild 27 Lösung $u(x,t)$ für $\ell = 1$ und $c = 1$

Aufgabe 28:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := x + \sin x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= t\,,\ u(\pi,t) = \pi \qquad \text{für} \quad 0 \ge t\,. \end{aligned}$$

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen
$u(0,t) = \varphi_0(t) := t$ und $u(\pi,t) = \varphi_1(t) := \pi$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \Big(\varphi_0(t) + \frac{x}{\pi}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\Big) = u(x,t) - t - \frac{x}{\pi}(\pi - t)$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

$$u_t = v_t + 1 - \frac{x}{\pi}\,, \quad u_{xx} = v_{xx}\,, \quad x + \sin x = u(x,0) = v(x,0) + x$$

Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + \frac{x}{\pi} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= v_0(x) = \sin x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und inhomogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= v_0(x) = \sin x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch: $\quad v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$

mit den Fourier-Koeffizienten b_k. Aus $\quad \sin x = v^*(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$

ergibt ein Koeffizientenvergleich $b_1 = 1$ und $b_k = 0$ sonst, also $\quad v^*(x,t) = e^{-t}\sin(x)\,.$

3. Schritt

Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + \frac{x}{\pi} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Für die Lösung wird nach der Fourier-Methode folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\sin(kx)\,.$$

Die homogene Anfangsbedingung wird nach einem Koeffizientenvergleich durch die Forderung $a_k(0) = 0$ erfüllt. Die rechte Seite wird ebenfalls in eine $\sin$-Reihe entwickelt

$$\frac{x}{\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin(kx) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{\pi}\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{k\pi}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{k\pi}\cos(kx)\,dx\right) \\ &= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cos(k\pi) = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(\dot a_k(t) + k^2 a_k(t) - c_k(t)\big)\sin(kx) = 0.$$

Die Koeffizienten $a_k(t)$ der Lösung v^{**} sind daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben zu berechnen

$$\dot a_k(t) + k^2 a_k(t) = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k \quad \text{mit} \quad a_k(0) = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$a_k(t) = -\frac{2}{k^3\pi}(-1)^k + d_k e^{-k^2 t}\,.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgabe, so ergibt sich

$$a_k(t) = \frac{2}{k^3\pi}(-1)^k\left(e^{-k^2 t} - 1\right)\,.$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$u(x,t) = t + v^*(x,t) + v^{**}(x,t)\,.$$

Abgabetermin: 11.07.06 (zu Beginn der Übung)