

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 7

#### Aufgabe 25:

Man löse das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), & x \geq 0, \\u_t(x, 0) &= v_0(x), \\u(0, t) &= 0, & t > 0\end{aligned}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine  $C^2$ -Funktion handelt, für

- a)  $u_0(x) = x, \quad v_0(x) = x^2,$
- b)  $u_0(x) = \sin x, \quad v_0(x) = 1.$

#### Aufgabe 26:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung mittels Produktansatz:

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\u(0, t) &= 0 = u(1, t), & t \geq 0, \\u(x, 0) &= \frac{x(1-x)}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\u_t(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

**Aufgabe 27:**

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell} \sin t - \frac{x}{\ell} \cos t, \quad \text{für } 0 < x < \ell \text{ und } t > 0,$$

$$u(0, t) = \sin t,$$

$$u(\ell, t) = \cos t, \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{\ell},$$

$$u_t(x, 0) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell$$

und zeichne die Lösung für  $\ell = 1$  und  $c = 1$ .

**Aufgabe 28:**

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{für } 0 < x < \pi, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) := x + \sin x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = \pi \quad \text{für } 0 \geq t.$$

**Abgabetermin:** 11.07.06 (zu Beginn der Übung)