Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**

Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & \text{für } 0 < x < 3\,, \\ & & & \phantom{\text{für }} 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) & = & 0 \;=\; u(3,t) & \text{für } 0 \le t \le T \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{für } 0 \le x \le 3\,. \end{array}$$

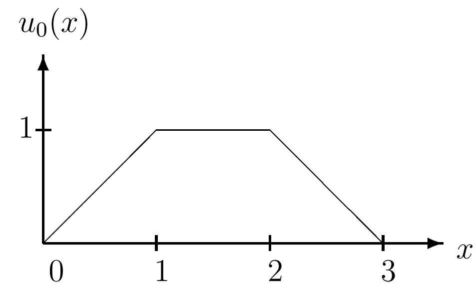

Bild 21 Anfangsfunktion u_0

Lösung: (VD-Klausur 19.02.02 Aufgabe 1)

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$, eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda \;= (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(3,t) = X(3)T(t)$$

liefern $X(0) = 0 = X(3)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(3) = 0$ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{9}$$

mit $k \ge 1$ und zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = b_k \sin\frac{k\pi x}{3}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right) .$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{3} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right) .$$

Mit der noch nicht verwendeten Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet.

Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le 1\,, \\ 1 & \text{für} \quad 1 \le x \le 2\,, \\ 3-x & \text{für} \quad 2 \le x \le 3\,. \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung führt damit auf

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) .$$

Die b_k ergeben sich also als Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{3}\int_0^3 u_0(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{3}\left\{\int_0^1 x\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx + \int_2^3 (3-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{-\frac{3x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_0^1 + \frac{3}{k\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx - \frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_1^2\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3(3-x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_2^3 - \frac{3}{k\pi}\int_2^3 \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{-\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3} + \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{k\pi}{3} - \frac{3}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}\right. \\
&\qquad \left. \frac{3}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} - \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{3k\pi}{3} + \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2 \sin\frac{2k\pi}{3}\right\} \\
&= \frac{6}{k^2\pi^2}\left\{\sin\frac{k\pi}{3} + \sin\frac{2k\pi}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{3x-1} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Lösung:

a) Für die Dimension $n = 1$ lautet die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t < 0\,. \end{cases}$$

Mit der Fundamentallösung kann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t) \cdot u(y,0)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{3y-1}\,dy \\ &= \frac{e^{-1}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y)^2 + 12ty}{4t}\right) dy \\ &= \frac{e^{-1}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(y^2 - 2(x+6t)y + x^2)}{4t}\right) dy \\ &= \frac{e^{-1}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-((y-(x+6t))^2 + x^2 - (x+6t)^2)}{4t}\right) dy \\ &= e^{3x+9t-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-(x+6t))^2}{4t}\right) dy \\ &= e^{3x+9t-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y-(x+6t),t)\,dy = e^{3x+9t-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t)\,dp \\ &= e^{3x+9t-1} \end{aligned}$$

b) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \mu = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} T' - \mu T = 0 \quad &\Rightarrow \quad T(t) = Ce^{\mu t}\,, \\ X'' - \mu X = 0 \quad &\Rightarrow \quad X(x) = a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x} \end{aligned}$$

und damit die Lösung aus dem Produktansatz

$$u(x,t) = Ce^{\mu t}\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right) .$$

Einsetzen der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich ergibt

$$e^{3x-1} = e^{3x}e^{-1} = u(x,0) = C\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right) \quad \Rightarrow \quad Ca_1 = e^{-1}, \sqrt{\mu} = 3, a_2 = 0.$$

Die Lösung aus dem Produktansatz lautet also

$$u(x,t) = e^{3x+9t-1} .$$

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{array}{rcll}
u_t & = & \Delta u & \text{für} \quad (x,y) \in \,]0,1[\, \times \,]0,2[\,, \quad 0 < t\,, \\
u(0,y,t) & = 0 & = u(1,y,t) & \text{für} \qquad y \in [0,2]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,0,t) & = 0 & = u(x,2,t) & \qquad\quad x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,y,0) & = & 7\sin(2\pi x)\sin(\pi y) & \text{für} \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\
 & & +(3\sin(\pi x) - 4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) & .
\end{array}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)Y(y)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda = (\text{konst})\,.$$

Für T erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$T' + \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ke^{-\lambda t}\,,$$

Nach weiterer Trennung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen in X un Y

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu = (\text{konst})\,.$$

Die Randbedingungen

$$\begin{array}{rcccl}
0 & = & u(0,y,t) & = & X(0)Y(y)T(t)\,, \\
0 & = & u(1,y,t) & = & X(1)Y(y)T(t)\,, \\
0 & = & u(x,0,t) & = & X(x)Y(0)T(t)\,, \\
0 & = & u(x,2,t) & = & X(x)Y(2)T(t)
\end{array}$$

liefern $X(0) = 0 = X(1)$ und $Y(0) = 0 = Y(2)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in X

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = 0 = X(1)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\mu > 0$

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\mu}x) + b\sin(\sqrt{\mu}x)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(1) = 0$ liefert $\mu_k = k^2\pi^2$ mit $k \ge 1$ und $X_k(x) = b_k \sin(k\pi x)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in Y

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad Y(0) = 0 = Y(2)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\lambda - \mu > 0$

$$Y(y) = c\cos(\sqrt{\lambda - \mu}y) + d\sin(\sqrt{\lambda - \mu}y)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $Y(0) = 0$ ergibt $c = 0$ und $Y(2) = 0$ liefert $\lambda_{j,k} - \mu_k = \dfrac{j^2\pi^2}{4}$ mit $j \geq 1$ und $Y_k(y) = d_k \sin\left(\dfrac{j\pi y}{2}\right)$.

Setzt man $\lambda_{j,k}$ in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_{j,k}(t) = Ke^{-\pi^2(k^2+j^2/4)t}\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j}e^{-\pi^2(k^2+j^2/4)t}\sin(k\pi x)\sin\left(\frac{j\pi y}{2}\right)\,.$$

Mit der Anfangsvorgabe ergibt sich

$$7\sin(2\pi x)\sin(\pi y) + (3\sin(\pi x) - 4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) = u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j}\sin(k\pi x)\sin\left(\frac{j\pi y}{2}\right).$$

Wegen $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ gilt

$$(3\sin(\pi x) - 4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) = \sin(3\pi x)\sin(3\pi y/2)$$

und man erhält mit einem Koeffizientenvergleich $A_{2,2} = 7$, $A_{3,3} = 1$ und $A_{k,j} = 0$ sonst, also die Lösung

$$u(x,y,t) = 7e^{-5\pi^2 t}\sin(2\pi x)\sin(\pi y) + e^{-45\pi^2 t/4}\sin(3\pi x)\sin(3\pi y/2)\,.$$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-5\pi^2 t} = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-45\pi^2 t/4} = 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,t) = 0\,.$$

Aufgabe 24:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= -4x\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos x\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Lösung:

Eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $u_{tt} - u_{xx} = -4x$ raten:

$$w(x,t) = -2xt^2$$

Probe: $\quad w_{tt} - w_{xx} = -4x - 0 = -4x$

Transformation durch $\quad u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) \quad$ in ein Anfangswertproblem mit homogener Differentialgleichung in v:

Transformation der Differentialgleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} = w_{tt} - w_{xx} + v_{tt} - v_{xx} = -4x \quad \Rightarrow \quad v_{tt} - v_{xx} = 0$$

Transformation der Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = w(x,0) + v(x,0) = v(x,0) = 1$$

$$u_t(x,0) = w_t(x,0) + v_t(x,0) = v_t(x,0) = \cos x$$

Die d´Alembertschen Lösungsformel ergibt ($c = 1$):

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos\xi\, d\xi \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) - \sin(x-t)\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung der Anfangswertaufgabe nach dem Superpositionsprinzip durch:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = -2xt^2 + 1 + \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) - \sin(x-t)\right)$$

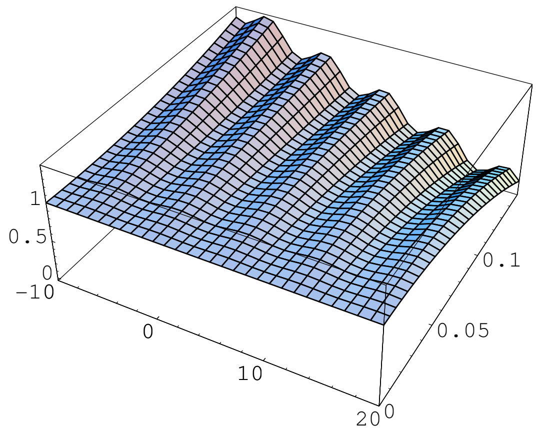

Bild 25.6.5 Lösung $u(x,t)$

Probe:

in die Differentialgleichung einsetzen

$$u_{tt} - u_{xx} = w_{tt} - w_{xx} + v_{tt} - v_{xx}$$

$$= -4x + \frac{1}{2}\left(-\sin(x+t) + \sin(x-t)\right) - \frac{1}{2}\left(-\sin(x+t) + \sin(x-t)\right) = -4x$$

in die Anfangsbedingungen einsetzen

$$u(x,0) = w(x,0) + v(x,0) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sin x - \sin x\right) = 1$$

$$u_t(x,0) = w_t(x,0) + v_t(x,0) = \frac{1}{2}\left(\cos x + \cos x\right) = \cos x$$

Abgabetermin: 27.06.06 (zu Beginn der Übung)