

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 5

#### Aufgabe 17:

Man löse die Aufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= -1, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq a\end{aligned}$$

folgendermaßen:

- a) Man bestimme eine partikuläre Lösung von  $\Delta u = -1$  in der Gestalt

$$u_p(x, y) = \alpha x + \beta x^2, \quad \alpha \neq 0.$$

- b) Man setze  $u_h := u - u_p$  und gebe das resultierende Randwertproblem in  $u_h$  an.

*Hinweis:*

Durch geeignete Wahl von  $\alpha$  lässt sich eine Randbedingung vereinfachen.

- c) Man löse die Randwertaufgabe aus b).

#### Aufgabe 18:

- a) Man zeige:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  besitzt in Polarkoordinaten  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  folgende Dargestellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

- b) Mit Hilfe eines Produktansatzes der Form  $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$  berechne man alle Lösungen von

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0.$$

*Hinweis:*

Für sogenannte Eulersche Differentialgleichungen

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

liefert ein Ansatz der Form  $y(x) = x^\alpha$  Lösungen.

**Aufgabe 19:**

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreis

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für } 0 < r < 5 \quad \text{und } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\u(r, 0) &= 0 \quad \text{und } u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq 5, \\u(5, \varphi) &= \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von  $u$ .

**Aufgabe 20:**

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring  
 $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$  (in Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0, \\u(2, \varphi) &= \cos \varphi, \\u(3, \varphi) &= 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi).\end{aligned}$$

Man berechne die Lösung in

- a) Polarkoordinaten und
- b) kartesischen Koordinaten.

**Abgabetermin:** 13.06.06 (zu Beginn der Übung)