Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} - (2\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.

b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform.

c) Mit den Daten aus b) bestimme man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

a) Ein Vergleich von

$$u_{xx} - (2\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0$$

mit der Standardform

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

ergibt $a = 1$, $b = -\sin(x)$, $c = -\cos^2(x)$.
Wegen $ac - b^2 = -\sin^2(x) - \cos^2(x) = -1 < 0$ ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^2$ hyperbolisch.

b) Die Transformation der gegebenen Differentialgleichung in u auf die 2. hyperbolische Normalform

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)$$

in $\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \;\Leftrightarrow\; \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = u(x, y)$ erfolgt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
u_x &= \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x \\
u_y &= \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\xi_x\eta_x\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{xx} + \tilde{u}_\eta\eta_{xx}\,, \\
u_{xy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \tilde{u}_\xi\xi_{xy} + \tilde{u}_\eta\eta_{xy}\,, \\
u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2\xi_y\eta_y\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{yy} + \tilde{u}_\eta\eta_{yy}\,.
\end{aligned}$$

Die allgemeine transformierte Gleichung lautet daher:

$$
\begin{aligned}
& a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} \\
= \; & a(\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\xi_x\eta_x\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{xx} + \tilde{u}_\eta\eta_{xx}) \\
& + 2b(\tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \tilde{u}_\xi\xi_{xy} + \tilde{u}_\eta\eta_{xy}) \\
& + c(\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2\xi_y\eta_y\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{yy} + \tilde{u}_\eta\eta_{yy}) \\
= \; & \underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{=A}\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\underbrace{(a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)}_{=B}\tilde{u}_{\xi\eta} \\
& + \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{=C}\tilde{u}_{\eta\eta} + \underbrace{(a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy})}_{=D}\tilde{u}_\xi \\
& + \underbrace{(a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy})}_{=E}\tilde{u}_\eta \\
= \; & f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)), \tilde{u}_\xi\xi_x + \tilde{u}_\eta\eta_x, \tilde{u}_\xi\xi_y + \tilde{u}_\eta\eta_y)
\end{aligned}
$$

Um die Normalform zu erhalten werden die Koeffizienten A und C gleich Null gesetzt, d.h. man hat folgende partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in z, die sich in zwei lineare homogene faktorisieren lässt, zu lösen:

$$0 = a z_x^2 + 2b z_x z_y + c z_y^2 = a(z_x - w_1 z_y)(z_x - w_2 z_y)\,,$$

mit $w_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ und reellen $w_1 \neq w_2$, wegen $b^2 - ac > 0$.
Die beiden zugehörigen Phasendifferentialgleichungen lauten

$$y' = -w_j = \frac{b}{a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\sin(x) \mp 1$$

$$\Rightarrow \quad y_{1,2} = \cos(x) \mp x + C_{1,2} \quad \Rightarrow \quad C_{1,2} = y - \cos(x) \pm x\,.$$

Sind $\varphi_j(x,y) = C_j$ die Lösungen, dann wählt man als neue Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \cos(x) + x \\ \\ y - \cos(x) - x \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten A und C sind per Konstruktion gleich 0. Die Berechnung der anderen Koeffizienten erfordert die partiellen Ableitungen von $\xi(x,y)$ und $\eta(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
&\xi_x = \sin(x) + 1\,, \quad \xi_y = 1\,, \quad \xi_{xx} = \cos(x)\,, \quad \xi_{xy} = 0\,, \quad \xi_{yy} = 0\,, \\
&\eta_x = \sin(x) - 1\,, \quad \eta_y = 1\,, \quad \eta_{xx} = \cos(x)\,, \quad \eta_{xy} = 0\,, \quad \eta_{yy} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\
&= (\sin(x)+1)(\sin(x)-1) - \sin(x)(\sin(x) + 1 + \sin(x) - 1) - \cos^2(x) \;=\; -2 \\
D &= a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} = \cos(x) \\
E &= a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} = \cos(x) \\
f &= (\cos x)u_y = \cos x(\tilde{u}_\xi\xi_y + \tilde{u}_\eta\eta_y) = \cos x(\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta)
\end{aligned}
$$

Die Normalform lautet daher

$$-4\tilde{u}_{\xi\eta} + \cos(x)\tilde{u}_\xi + \cos(x)\tilde{u}_\eta = \cos x(\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta) \quad \Rightarrow \quad -4\tilde{u}_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_{\xi\eta} = 0\,.$$

c) Die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung aus b) ist gegeben durch (zweimalige Integration, erst nach ξ und dann nach η oder umgekehrt):

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \,,$$

mit noch unbekannten Funktionen f und g. Rücktransformation liefert die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung.

$$u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = f\left(y - \cos(x) + x\right) + g\left(y - \cos(x) - x\right) \,.$$

Aufgabe 14:

Man finde partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_y = 0$$

mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$.

Lösung:

$u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ in die Differentialgleichung eingesetzt liefert

$$v''w + 2v'w' + vw' = 0\,.$$

Dividieren durch $v \cdot w$ und umformen ergibt:

$$\frac{v''}{v} + 2\frac{v'w'}{vw} + \frac{w'}{w} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v''}{v} + (\frac{2v'}{v} + 1)\frac{w'}{w} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda := -\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v}(\frac{2v'}{v} + 1)^{-1} = \frac{v''}{2v' + v}\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v'' - 2\lambda v' - \lambda v = 0 \quad \text{und} \quad w' + \lambda w = 0$$

Der übliche Ansatz zur Lösung $v(x) = \exp(\gamma x)$ eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das charakteristische Polynom

$$\gamma^2 - 2\lambda\gamma - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \lambda}$$

und damit dann für $\lambda \neq 0, -1$ die Lösung

$$v(x) = Ae^{(\lambda + \sqrt{\lambda^2+\lambda})x} + Be^{(\lambda - \sqrt{\lambda^2+\lambda})x}\,.$$

Mit der Lösung $w(y) = e^{-\lambda y}$ für die zweite Differentialgleichung erhält man

$$u(x, y) = v(x) \cdot w(y) = \left(Ae^{(\lambda + \sqrt{\lambda^2+\lambda})x} + Be^{(\lambda - \sqrt{\lambda^2+\lambda})x}\right) e^{-\lambda y}\,.$$

Aufgabe 15:

Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Lösung:

a) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ in Verbindung mit der Randbedingung $u(0,t) = 3\sin(2t)$ ergibt $T(t) = \dfrac{3}{X(0)} \sin(2t)$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u \\
&= -\frac{12X(x)}{X(0)}\sin(2t) - \frac{3X''(x)}{X(0)}\sin(2t) + \frac{12X(x)}{X(0)}\cos(2t) + \frac{3X(x)}{X(0)}\sin(2t) \\
&= \underbrace{\left(-\frac{9X(x)}{X(0)} - \frac{3X''(x)}{X(0)}\right)}_{=0}\sin(2t) + \underbrace{\left(\frac{12X(x)}{X(0)}\right)}_{=0}\cos(2t)\,.
\end{aligned}$$

Einzige Lösung ist damit $X \equiv 0$. Dies führt auf $u \equiv 0$, der Produktansatz liefert hier also keine Lösung.

b) Der Lösungsansatz $u(x,t) = 3e^{-ax}\sin(2t - bx)$ erfüllt die Randbedingungen und $a > 0$ sorgt für die Beschränktheit von u für $x \to \infty$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u \\
&= e^{-ax}\left\{\sin(2t - bx)\underbrace{\left(3(b^2 - a^2) - 9\right)}_{=0} + \cos(2t - bx)\underbrace{(12 - 6ab)}_{=0}\right\}\,.
\end{aligned}$$

Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem $ab = 2 \quad \wedge \quad b^2 - a^2 = 3$ besitzt die Lösungen $a = 1$ und $b = 2$, und die Lösung der Telegraphengleichung lautet $u(x,t) = 3e^{-x}\sin(2t - 2x)$.

Aufgabe 16:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, & x \in (0,\pi), \quad y > 0,\\
u(x,0) &= \frac{4}{n}\sin 5nx\,, & x \in [0,\pi],\\
u_y(x,0) &= 0\,, &\\
u(0,y) &= 0\,, & y \geq 0\,,\\
u(\pi,y) &= 0\,. &
\end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht korrekt gestellt ist.

Lösung:

Der Separationsansatz in die Differentialgleichung eingesetzt

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} =: \lambda$$

liefert zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) - \lambda g(y) = 0$$

Der Separationsansatz in die Randbedingungen eingesetzt liefert

$$0 = u(0,y) = f(0)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \qquad (\text{sonst gilt} \quad g \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0\,)$$

$$0 = u(\pi,y) = f(\pi)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = 0$$

Zunächst löst man die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 = f(\pi)$$

a) $\lambda = 0: \quad f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = ax + b$

Mit den Randbedingungen ergibt sich $f \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0$, d.h. keine Lösung .

b) $\lambda < 0: \quad f(x) = e^{\mu x} \;\Rightarrow\; p(\mu) := \mu^2 + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\det \boldsymbol{A} \neq 0}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0$, d.h. keine Lösung.

c) $\lambda > 0: \quad f(x) = e^{\mu x} \;\Rightarrow\; p(\mu) := \mu^2 + \lambda = 0$

$\Rightarrow\; f(x) = a\sin(\sqrt{\lambda}x) + b\cos(\sqrt{\lambda}x)$

Mit den Randbedingungen ergibt sich
$0 = f(0) = a\sin(0) + b\cos(0) = b$ und
$0 = f(\pi) = a\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda}\pi = k\pi \;\Rightarrow\; \lambda = k^2$
oder $a = 0 \;\Rightarrow\; f \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0$, d.h. keine Lösung.

Alle nichttrivialen Lösungen der Randwertaufgabe in f sind also gegeben durch

$$f_k(x) = a_k \sin kx \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $g''(y) - k^2 g(y) = 0$ lautet daher:

$$g_k(y) = \tilde{c}_k e^{ky} + \tilde{d}_k e^{-ky} = c_k \sinh(ky) + d_k \cosh(ky)$$

Damit erhält man folgende Lösungen der Ausgangsgleichung:

$$u_k(x, y) = (A_k \sinh(ky) + B_k \cosh(ky)) \sin kx$$

und durch Superposition ergibt sich

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sinh(ky) + B_k \cosh(ky)) \sin kx$$

Die verbleibenden Anfangsbedingungen ergeben:

$$\frac{4}{n} \sin 5nx = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sinh(0) + B_k \cosh(0)) \sin kx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx$$

$$\Rightarrow\; B_{5n} = \frac{4}{n} \;\text{ und }\; B_k = 0 \;\text{ für }\; 5n \neq k$$

$$0 = u_y(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \cosh(0) \sin kx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \sin kx \quad \Rightarrow\; A_k = 0\,.$$

Damit wird die Aufgabe gelöst durch

$$u_n(x, y) = \frac{4}{n} \cosh(5ny) \sin 5nx$$

Da die Lösung $u_0(x, y)$ zu Nullanfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u_y(x, 0) = 0$$

durch $u_0 \equiv 0$ gegeben ist und für die Lösung aus der Aufgabenstellung

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sin 5nx = 0 \quad \text{und} \quad (u_n)_y(x, 0) = 0$$

gilt, liegt für die Anfangsdaten ein stetiger Übergang vor.

Dies gilt jedoch nicht für $y > 0$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \cosh 5ny = \infty\,.$$

Für $y > 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \not\equiv u_0$, die Lösung hängt damit nicht stetig von den Anfangsdaten ab, ist also nicht korrekt gestellt.

Abgabetermin: 23.05.06 (zu Beginn der Übung)