Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) &= \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösungen für $t = 0, 0.25, 0.5, 1$.

Aufgabe 2: (alte Klausuraufgabe)
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= 1, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe

Hinweis: Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogne Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip. Eine (polynomiale) partikuläre Lösung kann hier geraten werden. Allgemein gilt:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} h(\omega, s)\, \mathrm{d}\omega \mathrm{d}s$$

löst die inhomogene Aufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\cdot$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, y) = v(x)\,w(y)$ Lösungen der folgenden partiellen Differentialgleichungen für $x,\, y > 0$.

a) $u_{xy} + y u_x - x u_y = 0$

b) $u_{yy} - \sqrt{x} u_x - u = 0\,.$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösungen der folgenden Anfangsrandwertaufgaben.

a) (alte Klausuraufgabe)

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx} && 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 && 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \\
u_t(x,0) &= 2\sin(4x) && 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \\
u(\frac{\pi}{2},t) &= u(0,t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= \frac{1}{2}x(1-x) && 0 \le x \le 1\,, \\
u_t(x,0) &= 0 && 0 \le x \le 1\,, \\
u(1,t) &= u(0,t) = 0 && t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Abgabetermin: 24. 5. 2005