Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Prof. Dr. W. Hofmann
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man löse

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= 1 & 0.25 \le x \le 0.75 \\ u(x,0) &= 0 & 0 \le x \le 0.25;\ 0.75 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 & t > 0 \end{aligned}$$

Beachte: Die Anfangswerte haben Unstetigkeitsstellen.

b) Wo ist die Lösung wie oft differenzierbar (Begründung)?

c) Was fällt auf im Vergleich mit der Wellengleichung?

d) Man programmiere (Programm abgeben) die Teilsumme S_n der ersten n Summanden der Lösungsformel und zeichne sie als Näherugslösung für die Werte $t = 0,\ 10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 0.1,\ 1$. Wie groß muß n gewählt werden, damit die Zeichnung zumindest für $t = 0$ vernünftig aussieht?

Aufgabe 18: Man bestimme eine Näherungslösung für

$$\begin{aligned} u_t &= 2\ u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= x & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= 0 & t \ge 0 \\ u(1,t) &= \exp(-t) & 0 \le t \le 387,235 \end{aligned}$$

und schätze ihren Fehler zur exakten Lösung ab.
Hinweise:

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung, welche die Randwerte annimmt

b) Minimaxprinzip.

Aufgabe 19:

a) Man vereinfache die Differentialgleichung

$$u_{xy} = a\ u_x + b\ u_y + c\ u, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

mittels einer Tranformation der Form

$$u(x, y) = v(x, y) \exp(\alpha x + \beta y)$$

b) Man bestimme eine partielle Lösung mittels eines Produktansatzes.

Aufgabe 20: Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $f : B \to \mathbb{C}$ differenzierbar.

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{also} \quad u = \mathrm{Re}(f), \ v = \mathrm{Im}(f).$$

a) Man zeige: u und v sind harmonisch in B d.h. $\Delta u(x, y) = 0$ in B.

b) Man berechne die aus $f(z) = z^n$, $z = x + iy$, $n = 1, 2, 3$, entstehenden harmonischen Funktionen in kartesischen und Polarkoordinaten.

c) Man zeige, daß $\Delta u(x, y) = -1$ Polynomlösungen beliebiger Ordnung besitzt.

Hinweis:

a) Errate eine spezielle Lösung von $\Delta u(x, y) = -1$.

b) Superposition

Abgabetermin: 22.6.04