

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13: Man bestimme eine Lösung von

$$3(u - y)^2 u_x - u_y = 0, \quad u(0, y) = y$$

- a) mit Hilfe der Charakteristikenmethode
- b) mit Hilfe eines Summenansatzes: $u(x, y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 14: Man zeige, daß die RWA der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ mit der Randwerten

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x), \quad u(x, 1) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g, h \text{ beliebig} \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ g(0) &= h(0) = g(1) = h(1) = 0, \quad \text{Verträglichkeitsbedingung} \end{aligned}$$

nicht sachgemäß ist.

Bemerkung: Diese Randbedingungen garantieren für die Potentialgleichung eine eindeutige Lösung.

Hinweis: Man zeige, daß bei beliebig vorgegebenen g, h i. allg. keine Lösung existiert.

Aufgabe 15:

- a) Durch einen Separationsansatz $u(x, y) = f(x)g(y)$ bestimme man eine Lösung von
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, 0) = (1/n) \sin(nx), \quad x \in [0, \pi], \quad n \in \mathbb{N}, \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dieser Typ von Ausgangsdaten bestimmt die Lösung der RWA der Wellengleichung eindeutig.

b) Man zeige, daß sowohl die Aufgabe aus a) als auch die Aufgabe

$$\Delta u = 0, \quad y > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = (1/n) \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

nicht sachgemäß sind.

Bemerkung: Dieser Typ von Ausgangsdaten bestimmt die Lösung der AWA der Wellengleichung eindeutig.

Hinweise:

a) AWe und RWe sind durch den Produktansatz gekoppelt.

b) Man zeige, daß die Lösungen nicht stetig von den AWn abhängen.

Aufgabe 16: Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$u_{xx} - (2 \sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0.$$

Abgabetermin: 8.6.04