

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 3

**Aufgabe 9:** (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten)

Man zeige:

Für die Anfangswertaufgabe der Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad 0 < t < t_0, \quad a < x < b, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= \psi(x)\end{aligned}$$

gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  derart, dass sich zwei Lösungen  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  mit den Anfangswerten

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2$$

um weniger als  $\varepsilon$  unterscheiden, d.h.

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

falls  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$  und  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$  gilt.

**Aufgabe 10:**

Man löse

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - u_{xx} &= 0, & 0 \leq x, t \leq 2\pi, \\
 u(x, 0) &= 0; & 0 \leq x \leq 2\pi, \\
 u_t(x, 0) &= 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\
 u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

durch geeignete Fortsetzung der Anfangsdaten. Wo ist  $u$  wie oft differenzierbar?

**Aufgabe 11:**

Haben folgende Aufgaben für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^1$ ,  $\psi \in C^2$  immer eine Lösung? Begründung!

a)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ,  $u(x, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, x) = \psi(x)$ ,

b)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ,  $u(x, x) = \varphi(x)$ ,  $u(x, -x) = \psi(x)$

Hinweis: Allgemeine Lösung an die Anfangswerte anpassen.

**Aufgabe 12:**

a) Man bestimme im Gebiet  $G = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$  die allgemeine Lösung von

$$u_{xy} = f(x, y), \quad u \in C^2(\bar{G}).$$

Welche Anfangswerte können auf den positiven Halbachsen vorgegeben werden um die Lösung eindeutig festzulegen?

*Hinweis:* Parallel zu den Koordinatenachsen integrieren.

b) Man löse

$$\begin{aligned}
 u_{xy} &= xy, & x, y \geq 0, \\
 u(x, 0) &= x^2, & x \geq 0, \\
 u(0, y) &= 3y & y \geq 0.
 \end{aligned}$$

**Abgabetermin:** 18.5.2004