Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Prof. Dr. W. Hofmann
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$3u_x - 4u_y = 7\,, \quad u\,(x,0) = e^x.$$

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{array}{rcl} \xi & = & \alpha x + \beta y \\ \eta & = & \gamma x + \delta y \end{array}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 2:

Bei einer eingespannten Seite greife eine konzentrierte Kraft $F(t)$ im Punkt x_0 mit $0 < x_0 < l$ an.

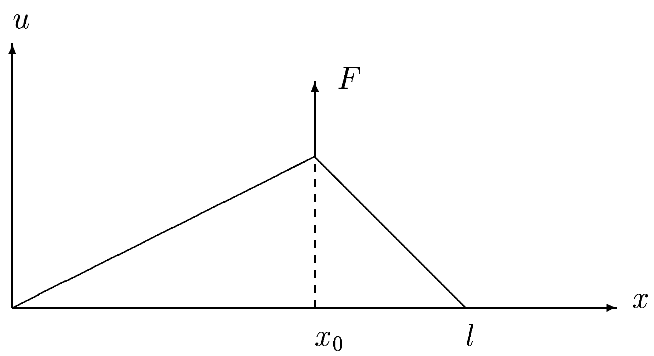

Bild: Abbildung zum Zeitpunkt $t = 0$

Dann ergibt sich die Schwingungsgleichung in Integralform in der Gestalt

$$\begin{aligned}&\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)]d\xi - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \\ = &\int\limits_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2,\tau)-u_x(x_1,\tau)]d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} F(\tau)d\tau\end{aligned}$$

für alle (t_1, t_2) und alle (x_1, x_2), wobei ρ die lineare Dichte der Saite ist und $f(x,t)$ die zum Zeitpunkt t auf die Längeneinheit bezogene Kraft im Punkt x. Wie kann diese Schwingung durch Differentialgleichungen und Anfangs- und Randbedingungen beschrieben werden?

Aufgabe 3:

Man zeige:
Es gibt stetige Funktionen $f \in C(\mathbb{R}^2) \setminus C^1(\mathbb{R}^2)$ derart, daß $u_{xy} = f(x,y)$ keine C^2-Lösung hat.

Hinweis: $f(x,y) = g(x)g(y)$ mit $g \in C^0 \setminus C^1$ ist eine Möglichkeit.

Aufgabe 4:

Im $\mathbb{R}^2$ zeige man auf elementare Weise die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes

$$\int_D u_y(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} u(\boldsymbol{x}) \cos\alpha \, ds$$

Dabei sei $D \subset \mathbb{R}^2$ der Normalbereich

$$D = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\,,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\,,\ \varphi, \psi \in C^2[a,b]\right\}$$

$u \in C^1(\bar{D})$, α der Winkel zwischen der äußeren Normalen $\boldsymbol{n}$ des Gebiets D und der y-Achse und ds das Bogenelement.

Abgabetermin: 20.4.2004