Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1:
Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = e^{2x}$

a) unter direkter Verwendung der Fundamentallösung,
b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= h(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Transformation $\alpha = x + ct,\ \eta = x - ct$ die allgemeine Lösung der Aufgabe.
b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos^2(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung von der Richtigkeit ihrer Lösung.

Aufgabe 3:
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= \ 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x). \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tip: Verwenden Sie die Faktorisierungsmethode aus Abschnitt 6.1. der Vorlesung.

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung von der Richtigkeit ihrer Lösung.

Aufgabe 4:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(x)\cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode.

Abgabetermin: 24.6.03