

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Batt 1

Aufgabe 1:

Die Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf der Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 3 \sin 2t$, $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.
- Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken die Gleichungen

- $xu_x + yu_y = 2u$
- $uu_x + u_y = 1$
- $xu_x + 2yu_y = 3u$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Lösungen der beiden Anfangswertaufgaben

$$u_t - 2u_x = 0$$

und

$$u_t + xu_x = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x^3$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

mit den Anfangsdaten

a)

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \forall x \geq 0 \\ 1 & \forall x < 0 \end{cases}$$

b)

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \forall x \geq 0 \\ 0 & \forall x < 0 \end{cases}$$

Fertigen Sie Skizzen der Charakteristiken an. In welchen Bereichen können Sie die Lösung eindeutig angeben? Wo ist die Lösung nicht definiert?

Abgabetermin: 22.04.2003