

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 7

#### Aufgabe 25:

Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung liefert:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

#### Aufgabe 26:

Man löse folgende Anfangs-Randwertaufgabe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x - \ell}{\ell} \sin t - \frac{x}{\ell} \cos t, \quad \text{für } 0 < x < \ell \text{ und } t > 0, \\ u(0, t) = \sin t, \\ u(\ell, t) = \cos t, \quad \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \frac{x}{\ell}, \\ u_t(x, 0) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell.$$

**Aufgabe 27:**

Für den Kreisring  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 3,$$

$$u(1, \varphi) = -1 + 82 \cos(2\varphi),$$

$$u_r(3, \varphi) = 1 - 10 \sin \varphi.$$

Man gebe die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

**Aufgabe 28:**

Man berechne Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \mathbf{x} \in G := ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G.$$

**Hinweis:** Man verwende den Produktansatz  $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ .

**Abgabetermin:** 9.7. und 12.7.02