Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man löse die Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u = -1, &\quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, &\quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, &\quad 0 \le x \le a. \end{aligned}$$

Hinweise:

a) Bestimme eine partikuläre Lösung von $\Delta u = -1$ in der Gestalt

$$u_1 = \alpha x + \beta x^2, \quad \alpha \neq 0.$$

b) Setze $u = u_H + u_1$, mit $\Delta u_H = 0$.

c) Welche Randbedingungen ergeben sich daraus für u_H? Zur Vereinfachung wähle den Parameter α geschickt.

d) Löse die entstehende Aufgabe für u_H mit Produktansatz.

Aufgabe 22:

Am Anfangsort $x = 0$ eines Übertragungskabels wird ein Signal der periodischen Spannung $U_0 \cos wt$ eingespeist. Gesucht ist die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals am Orte $x > 0$ zur Zeit $t \geq 0$. Das Kabel sei sehr lang. Man hat dann die Telegraphengleichung (vgl. (25.3.28))

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + (\alpha + \beta) U_t + \alpha\beta U = 0$$

mit den Randbedingungen

$$U(0,t) = U_0 \cos wt, \quad t \geq 0$$
$$U(x,t) \text{ beschränkt für } x \to \infty$$

zu lösen. Dabei sind die Werte c, α, β konstruktionsbedingte Kenngrößen des Kabels. Insbesondere sind $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Ein zeitlich periodisches Eingangssignal läßt an jedem Ort $x > 0$ nach Abklingen der Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten.

a) Kann eine solche Lösung mittels eines Produktansatzes

$$U(x,t) = f(x)\, g(t)$$

gefunden werden?

b) Man versuche einen Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung mit einem zeitlich periodischen Verlauf bei Zulassung einer linear ortsabhängigen Phasenverschiebung verbindet.

Aufgabe 23:

Man bestimme mit Hilfe eines Produktansatzes $u(x,t) = p(x)q(t)$ eine Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx} && \text{für } 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\
u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \text{für } t \geq 0, \\
u(x,0) &= \tfrac{1}{2}x(1-x) && \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\
u_t(x,0) &= 0 && \text{für } 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Dreiterm-Rekursion für die Besselfunktionen

$$J_{k+1}(x) - \frac{2k}{x} J_k(x) + J_{k-1}(x) = 0 \qquad \text{(R)}$$

und Testwerte für $x = 2.13$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 0.1496067704\,, & J_1(x) &= 0.5649969806\,, \\ J_{13}(x) &= 3.357253124 * 10^{-10}\,, & J_{14}(x) &= 2.567845664 * 10^{-11}\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne mittels (R)

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & J_{13}(x),\ J_{14}(x) \quad \text{aus} & J_0(x),\ J_1(x) \\ \text{(ii)} & J_0(x),\ J_1(x) \quad \text{aus} & J_{13}(x), J_{14}(x) \end{array}$$

Begründung für das Fehlerverhalten?

b) Man formuliere einen Algorithmus zur Berechnung von $J_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ unter Benutzung von (R) als Rückwärtsrekursion.

Startwerte: $J_{N+1}(x) = 0, \quad J_N(x) = \varepsilon \quad (N \text{ „groß“}, \varepsilon \text{ „klein“})$

Normierung: $1 = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)$

Abgabetermin: 25.6. und 28.6.02