

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes.

- Zur Zeit $t_0 = 0$ mögen in einem Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Stoffes S eingebracht werden. Die Sättigungskonzentration sei $\frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die Menge $y(t)$ des zur Zeit $t \geq 0$ gelösten Stoffes S .
- Wie groß ist die in der Lösung auftretende Proportionalitätskonstante c , wenn nach 10 Minuten eine Lösungskonzentration von $\frac{1}{20}$ gemessen wird?
- Nach welcher Zeit sind dann 80 % des Stoffes S aufgelöst?

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgaben:

- $2y'y'' = 1$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$,
- $y'' = -y^{-2}$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = ty + t, \quad y(0) = 1.$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens (21.1.5) mit $h = 0.2$ eine Näherung für $y(1)$.
- Führen Sie drei Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation (21.1.11) aus. Welchen Wert hat $y^{[3]}(t)$ an der Stelle $t = 1$?
- Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und berechnen Sie den Wert $y(1)$.

Aufgabe 8:

- a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = \left(x + \frac{1}{4}y\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0.$$

Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe mit dem Satz von Picard-Lindelöf.

- b) Warum ist die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = \sin(xy)$ mit $y(0) = 1$ im Intervall $[0, 1]$ nichtnegativ? (Tip: Mittelwertsatz!)

Abgabetermine: 17.11.-21.11.2003