

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

In einem vollständig mit 4000 Liter Wasser gefülltem Becken befinden sich auf Grund eines technischen Defektes 8 Kilogramm Chlor. Angestrebt wird ein Chlorgehalt von höchstens 1 Gramm/Liter. Dazu leitet man pro Minute 20 Liter Wasser mit einem Chlorgehalt von 0,5 Gramm/Liter in das Becken.

- a) Beschreiben Sie den Mischprozess durch eine Differentialgleichung für den Chlorgehalt im Becken. Nehmen Sie an, dass in jedem Zeitintervall genau so viel Wasser aus dem Becken hinaus fließt, wie in diesem Zeitintervall in das Becken hineinfließt, und dass der Zufluß zu einer sofortigen Durchmischung führt.
- b) Gehen Sie nun davon aus, dass das hinzugeleitete Wasser kein Chlor enthält. Lösen Sie die in diesem Fall erhaltene Differentialgleichung. Stellen Sie fest, ob man nach vier Stunden die Frischwasserzufuhr beenden kann.

Aufgabe 2:

Stellen Sie fest, welche der folgenden Differentialgleichungen linear, homogen, Bernoullisch, separierbar oder Riccatisch ist. Geben Sie gegebenenfalls die jeweils üblichen Substitutionen und die dadurch erhaltenen Differentialgleichungen für die neuen Funktionen an. Diese Differentialgleichungen müssen nicht gelöst werden!

a) $(1 + e^{2x})y' = -2e^{2x}y$

b) $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$

c) $\cos(x)y' + \sin(x)y = -\cos^2(x)y$

d) $y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}y' = 0$

e) $y' = 2x(2x^2y^2 - 1)y$

f) $y - xy' = \frac{x^3}{y^2}$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $(2 + x^2 + \sin x)yy' = (2x + \cos x)y^2$

b) $x - 2y + 2xy' = 0$

c) $y' = t^2y + ct^2e^{\frac{t^3}{3}}$

Aufgabe 4:

a) Leiten Sie die im Buch (Ansorge, Oberle) auf Seite 139 angegebene Lösung

$$N(t) = \frac{kN_0}{N_0 + (k - N_0) \exp(-\lambda k(t - t_0))}$$

für die logistische Wachstumsgleichung

$$N'(t) = \lambda N(t)(k - N(t))$$

her.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 1 - x + x^2 + y - 2xy + y^2.$$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung.

Abgabetermine: 04.11-08.11.2002