Fachbereich Mathematik **WS 2001/2002**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

3. Übung

Aufgabe 9: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' \;=\; t\,y + t, \qquad y(0) \;=\; 1.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens (21.1.5) mit der Schrittweite $h = 0.2$ eine Näherung für $y(1)$. Verwenden Sie zum Vergleich das Verfahren von Runge–Kutta (24.2.10) und (24.2.14) mit gleicher Schrittweite.

b) Führen Sie drei Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation (21.1.11) aus. Welchen Wert hat $y^{[3]}(t)$ an der Stelle $t = 1$?

c) Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und berechnen Sie den exakten Wert y(1).

Aufgabe 10:

Eine Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *global Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \;\le\; L\,\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine Konstante L gibt, so dass die obige Ungleichung für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Q$ gilt.

a) Skizzieren sie den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Skizzieren sie den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die lokal Lipschitz-stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist.

c) Skizzieren sie den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar, aber nicht global Lipschitz-stetig ist.

d) Ist jede lokal Lipschitz-stetige Funktion stetig?

e) Ist jede lokal Lipschitz-stetige Funktion differenzierbar?

f) Ist jede stetig differenzierbare Funktion lokal Lipschitz-stetig?
Hinweis: Satz (17.3.5).

Aufgabe 11: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Differentialgleichungssystems für $t > 0$

$$\begin{aligned} 2\,t\;\dot{x}_1 &= x_1 + t\,x_2 \\ 2\,t^2\,\dot{x}_2 &= x_1 - t\,x_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Reduktion der Ordnung; eine spezielle Lösung lässt sich mit Hilfe des Polynomansatzes $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ erhalten.

Aufgabe 12: Ermitteln Sie die Lösung der folgenden linearen Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4\,t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Termin: 3.12. – 7.12.2001