Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

WS 2001/2002

Differentialgleichungen I

2. Übung

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 2\,t\,y + 3\,t^2 + 1.$$

Verwenden Sie dabei zur Lösungsdarstellung die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-x^2}\,dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie den Anfangswert $y(0) = y_0$ so, dass der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)/t$ für die Lösung $y(t)$ aus a) endlich ist. Wie lautet der Grenzwert?

Hinweis: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$,

c) Skizzieren Sie die Lösung y aus b) im Bereich $-1 \le t \le 5$ (MATLAB).

Aufgabe 6:

Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a) $(1 - y)\,y'' + 2\,(y')^2 = 0,$

b) $y'' = y^{-3},$

c) $t\,y'' = y'\,\ln(y'/t), \qquad t > 0.$

Aufgabe 7:

a) Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + (y(t))^{2/3} = 0, \qquad y(0) = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Lösung im Bereich $0 \leq t \leq 3 \ln 2$ eindeutig bestimmt ist (Satz von Picard, Lindelöf).

c) Zeigen Sie, dass die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe in Bereichen $0 \leq t \leq b$ mit $b > 3 \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist. Geben Sie eine zweite Lösung an.

Aufgabe 8:

a) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat die folgende Poissongleichung im $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = 1$$

eine radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, die die Randbedingungen

$$u(1) - u(2) = 0, \qquad u'(1) - u'(2) = a$$

erfüllt? Geben Sie die Lösungen an.

b) Bestimmen Sie die stationäre und radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kugelschale mit Innenradius r_i, Außenradius r_a, Innentemperatur T_i und Außentemperatur T_a.

Termin: 19.11. – 23.11.2001