

Differentialgleichungen I

1. Übung

Aufgabe 1:

Die Luft eines Raumes der Größe $50\text{m} \times 17.5\text{m} \times 4\text{m}$ besitze zur Zeit $t = 0$ einen CO_2 -Gehalt von 0.2% . Ein Ventilator befördert $4.2 \text{ m}^3/\text{s}$ Frischluft in den Raum, diese habe einen CO_2 -Gehalt von 0.05% .

Berechnen Sie den CO_2 -Gehalt der Raumluft nach 20 Minuten.

Aufgabe 2:

Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) *Trennung der Variablen:*

$$(t^2 + 1) y' = y^2 + 1,$$

$$\frac{m}{c} \dot{v} + v^2 = \frac{mg}{c},$$

b) *Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen:*

$$t y' = t - y,$$

$$t^2 y' = t y - y^2,$$

c) *Lineare Differentialgleichungen:*

$$y' = -2ty + t e^{-t^2},$$

$$y' = -y + 2t + 2,$$

$$y' = y + \cos t.$$

Aufgabe 3:

- a) Lösen Sie die Gleichung des logistischen Wachstums

$$N'(t) = \lambda N(t) (K - N(t))$$

über den Lösungsweg für Bernoullische Differentialgleichungen. Bestätigen Sie hiermit die Lösungsdarstellung in (20.1.9).

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = -y^2 + \frac{2}{t^2}.$$

Aufgabe 4:

- a) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist und bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung

$$(5t^2 + 7y^2) + (14ty + \cos y)y' = 0.$$

- b) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimmen Sie die allgemeine Lösung

$$y - \frac{2y^2}{t} + 2yy' = 0.$$

Termin: 5.11. – 9.11.2001