

Aufgabe 1

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 13x_1(t) + 4x_2(t) + h_1(t) \\x_2'(t) &= 4x_1(t) + 7x_2(t) + h_2(t) \\x_1(0) &= x_2(0), \quad x_1(b) = x_2(b).\end{aligned}$$

- Formulieren Sie die Aufgabe in Matrixschreibweise.
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung für die Inhomogenität $h_1(t) = 5t - 1$, $h_2(t) = -10t + 2$.
- Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für alle $b > 0$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 2

- Gegeben ist die Variationsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y^2 + (y')^2 - yy' dt$$

für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 1$.

Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung auf, bestimmen Sie die natürliche Randbedingung und lösen Sie die zugehörige Randwertaufgabe.

- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y'' - 4y = 18e^t.$$