

3.2 Kurvenintegrale

Für eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetige, skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir das **Kurvenintegral 1. Art** definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Erweiterung auf Kurvenintegrale über vektorwertige Funktionen, d.h.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := ?$$

Anwendung und Interpretation:

Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Welche **Arbeit** muss entlang der Kurve geleistet werden?

139

Definition: Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ definieren wir das **Kurvenintegral 2. Art** durch

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt$$

Herleitung:

Approximiere die Kurve durch einen Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist.

Dann gilt für die in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i) \rangle$$

140

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))(c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i)) \dot{c}_j(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \rightarrow 0$ konvergiert die linke Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**.

Bemerkung:

Für eine geschlossene Kurve $\mathbf{c}(t)$, d.h. $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, schreibt man das Kurvenintegral auch als

$$\oint_{\mathbf{c}} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

141

Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art:

1) **Linearität:**

$$\int_{\mathbf{c}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

2) Es gilt:

$$\int_{-\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

wobei $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$

3) Es gilt:

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} =$$

wobei der Endpunkt von \mathbf{c}_1 der Anfangspunkt von \mathbf{c}_2 ist.

142

4) Das Kurvenintegral 2. Art ist **parametrisierungsinvariant**.

5) Es gilt:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle ds$$

mit dem **Tangenten-Einheitsvektor** $\mathbf{T}(t) := \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$.

6) Formale Schreibweise:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_c \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) dx_i = \sum_{i=1}^n \int_c f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

mit

$$\int_c f_i(\mathbf{x}) dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_i(t) dt$$

143

Beispiel: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (-y, x, z^2)^T$$

$$\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t, at)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_c (-y dx + x dy + z^2 dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + a^2 t^2 a dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2) dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3} (2\pi)^3 \end{aligned}$$

144

Definition: Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral $\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entlang einer geschlossenen Kurve auch die **Zirkulation** des Feldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Beispiel:

Für das Feld $\mathbf{u}(x, y) = (y, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r \cos t, 1 + r \sin t)^T, 0 \leq t \leq 2\pi$ die Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r \sin t)(-r \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r \sin t - r^2 \sin^2 t) dt \\ &= \left[r \cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2 \end{aligned}$$

145

Definition:

Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs **aller** geschlossenen, stückweise \mathcal{C}^1 -Kurven $\mathbf{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\forall \mathbf{c} \quad : \quad \oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve \mathbf{c} abhängt.

Man sagt: das Kurvenintegral ist **wegunabhängig**.

Frage:

Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

146

Definition:

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve verbunden werden können:

$$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 \in D : \exists \mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D \quad : \quad \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{c}(b) = \mathbf{y}^0$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **Gebiet** in \mathbb{R}^n .

Bemerkung:

Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cup D \neq \emptyset, \quad U_2 \cup D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cap U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also – im Gegensatz zu zusammenhängende Mengen – in (zumindest) zwei disjunkte offene Bereiche trennbar.

147

Definition:

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld nennt man ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Bemerkung:

Ein Massenpunkt bewege sich in einem **konservativen** Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, d.h. \mathbf{K} besitzt ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$.

Dann ist $U(\mathbf{x}) = -\nabla \varphi(\mathbf{x})$ gerade die **potentielle Energie**:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla \varphi(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, so folgt:

$$m\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x}) \right) = 0$$

148

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f(x)$ ein stetiges Vektorfeld auf D .

- 1) Besitzt $f(x)$ ein Potential $\varphi(x)$, so gilt für alle stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurven $c : [a, b] \rightarrow D$:

$$\int_c f(x) dx = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $f(x)$ ist wirbelfrei.

- 2) Umgekehrt gilt: Ist $f(x)$ wirbelfrei, so besitzt $f(x)$ ein Potential $\varphi(x)$.
Ist $x^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet c_x (für $x \in D$) eine beliebige, die Punkte x^0 und x verbindende stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve in D , so ist $\varphi(x)$ gegeben durch:

$$\varphi(x) = \int_{c_x} f(x) dx + c, \quad c = \text{const.}$$

149

Beispiel:

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(x) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(x) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

Denn es gilt:

$$\nabla U(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} (x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geleistete Arbeit gilt dann:

$$A = \int_c \mathbf{K}(x) dx = \left(\frac{1}{\|c(a)\|} - \frac{1}{\|c(b)\|} \right)$$

150

Beispiel:

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz$$

Für eine beliebige, die Punkte $P = (1, 1, 2)$ und $Q = (3, 5, -2)$ verbindende \mathcal{C}^1 -Kurve $c(t)$ gilt also:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24$$

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral 2. Art die Spannung zwischen den beiden Punkten P und Q an.