

Der **Laplace–Operator** ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ ist also

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

Bedeutung: Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$u_{tt} = \Delta u \quad (\text{Wellengleichung})$$

$$u_t = \Delta u \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace–Gleichung oder Potentialgleichung})$$

19

Vektorwertige Funktionen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren.

Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

20

Definition:

Für $m = n$ nennt man die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathbf{x})$ von $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine C^k -Funktion, so nennt man f ein C^k -**Vektorfeld**.

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen,
- elektromagnetische Felder oder
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} f(\mathbf{x}^0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

Andere **Notationen:**

$$\operatorname{div} f(\mathbf{x}) = \nabla^T f(\mathbf{x}) = (\nabla, f(\mathbf{x}))$$

21

Bemerkung:

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi, f) + \varphi \operatorname{div} f$$

Bemerkung:

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition:

Für partiell differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Big|_{\mathbf{x}^0}$$

22

Andere **Notationen**:

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{x}) = \nabla \times f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung:

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f}$$

Bemerkung:

Ist $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2 -Funktion, so folgt aufgrund des Vertauschbarkeitssatzes von Schwarz

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0,$$

d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

23

1.2 Das vollständige Differential

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **differenzierbar** in \mathbf{x}^0 (oder **vollständig** bzw. **total differenzierbar**), falls es eine lineare Abbildung

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

d.h.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0$$

erfüllt ist.

24

Bezeichnungen:

Man nennt die lineare Abbildung l das (**vollständige** oder **totale**) **Differential** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 und bezeichnet l mit $df(\mathbf{x}^0)$.

Die zugehörige Matrix A heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 und wird mit $Jf(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $Df(\mathbf{x}^0)$ oder $f'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung:

Für $m = n = 1$ erhalten wir die aus Analysis I bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0 .

Bemerkung:

Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $A = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$.

25

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

- Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist $f(\mathbf{x})$ auch stetig in \mathbf{x}^0 .
- Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist das Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$Jf(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ Df_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

- Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^1 -Funktion auf D , so ist $f(\mathbf{x})$ auf D (vollständig) differenzierbar.

Bemerkung:

Man beachte, dass **differenzierbar** hier **vollständig/total** differenzierbar bedeutet.

26

Beweis von a):

Ist f in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| + \|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt \mathbf{x}^0 .

27

Beweis von b):

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Da f im Punkt \mathbf{x}^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} &= \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0) - t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \quad i = 1, \dots, n$$

28

Beispiel:

- a) Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

- b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos s & 2 \cos s & 3 \cos s \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

29

Beispiele:

- c) Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- d) Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

30

Satz: (Differentiationsregeln)

- 1) **Linearität** Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha f(\mathbf{x}^0) + \beta g(\mathbf{x}^0)$, α, β reell, differenzierbar in \mathbf{x}^0 und es gilt

$$\begin{aligned}d(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}^0) &= \alpha df(\mathbf{x}^0) + \beta dg(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{J}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}^0) &= \alpha \mathbf{J}f(\mathbf{x}^0) + \beta \mathbf{J}g(\mathbf{x}^0)\end{aligned}$$

- 2) **Kettenregel** Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, und ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in \mathbf{x}^0 differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}^0) = dg(\mathbf{y}^0) \circ df(\mathbf{x}^0)$$

und analog für die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}(g \circ f)(\mathbf{x}^0) = \mathbf{J}g(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{J}f(\mathbf{x}^0)$$

31

Beispiel: (zur Kettenregel)

Sei $\mathbf{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{h}(t_0) \\ &= Df(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h_k(t_0)\end{aligned}$$

32