Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$f(x,y,z) := 2xe^x + ye^y + yze^z - x(y+1)(z+2) = 0$$

in einer Umgebung des Nullpunktes eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ bildet. Bestimmen Sie außerdem die Tangentialebene an diese Fläche im Nullpunkt.

Aufgabe 2: [Klausur 2005]

a) Zeigen Sie, dass $(x,y) = (0,0)^T$ ein singulärer Punkt der implizit definierten Kurve

$$\left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist und stellen Sie fest, ob dies ein isolierter Punkt, ein Rückkehrpunkt oder ein Doppelpunkt ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine weiteren singulären Punkte gibt.

Aufgabe 3: [Klausur Prof. Geiger, Prof. Oberle] Durch die Relation

$$g(x,y) \;=\; x^4 + y^4 + 4xy = \;0$$

ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben.

Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Bestimmen Sie auch die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $y = -x$, sowie die Steigungen der Kurve in diesen Punkten, sofern dies möglich ist.. Skizzieren Sie die Kurve (z.B. mittels MATLAB).

Aufgabe 4:

Das folgende nichtlineare Gleichungssystem taucht im Zusammenhang mit der Diskretisierung einer exothermen Reaktion auf:

$$2u_1 - u_2 = \lambda \cosh(u_1)$$
$$2u_2 - u_1 = \lambda \cosh(u_2)$$

wobei $u_1, u_2, \lambda \in \mathbb{R}$ gelte.

Man ist besonders an maximalen λ–Werten und sogenannten Umkehr– bzw. Verzweigungspunkten (s. unten) interessiert.

Offensichtlich wird das System durch $(\lambda_0, (u_1)_0, (u_2)_0) = (0, 0, 0)$ gelöst.

a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $(-\epsilon, \epsilon)$ von $\lambda_0 = 0$ gibt, so dass das Gleichungssystem für alle $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine in einer Umgebung von $(0, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ eindeutige, von λ abhängige Lösung $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ mit $(u_1(0), u_2(0))^T = (0, 0)^T$ besitzt, die stetig nach λ differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass der lokale Lösungsast aus a) sich auch durch u_1 oder u_2 parametrisieren lässt.

c) Berechnen Sie eine Approximation von $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ für kleine $|\lambda|$–Werte, indem Sie durch Differenzieren der Gleichungen

$$2u_1(\lambda) - u_2(\lambda) = \lambda \cosh(u_1(\lambda))$$
$$2u_2(\lambda) - u_1(\lambda) = \lambda \cosh(u_2(\lambda))$$

die Ableitungen $(u_1(\lambda))', (u_2(\lambda))'$ bei $\lambda = 0$ berechnen und die Taylorpolynome ersten Grades für $u_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ aufstellen.

d) Motiviert durch Teil c) und den Symmetrien im Gleichungssystem liegt die Vermutung nahe, dass für den betrachteten Lösungszweig $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ gilt. Zeigen Sie, dass im Fall $u_1 = u_2$ das System auf die Gleichung

$$g(\lambda, u) := u - \lambda \cosh(u) = 0$$

reduziert werden kann, die sich eindeutig nach λ auflösen läßt.

e) Zeigen Sie, dass $(\lambda(u), u, u)^T$ in der Nähe von Null tatsächlich ein Lösungsast des nichtlinearen Gleichungssystems ist, und dass dieser Ast mit dem in Teil a) nach λ parametrisierten Ast (nahe Null) übereinstimmen muss.

f) Berechnen Sie Näherungen für die λ–Umkehrpunkte. In diesen Punkten hat die durch $g(\lambda, u) = 0$ gegebene Kurve eine vertikale Tangente, sofern man wie üblich das Koordinatensystem so wählt, dass die erste Variable horizontal und die zweite vertikal abgetragen wird. Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für die entsprechenden u–Werte auf, und benutzen Sie z.B. ein Fixpunktverfahren mit Startwert $u = 1$.

Abgabetermine: 11.12. – 15.12.2006