Analysis III, SoSe 05, 12.10.2005, (Oberle)

Aufgabe 1:

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der von der Kurve

$$\mathbf{c} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = \left(1 - t^2, t(1-t^2)\right)^{\mathrm{T}},$$

berandete, kompakte, bzgl. beider Koordinaten projizierbare Bereich.
Berechnen Sie $\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x,y) = (y,\ 1-x)^{\mathrm{T}}$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; |x| \le 1,\ \ -(1-x^2) \le y \le 1 - x^2,\ \ 0 \le z \le \left(1 - x^2 - y\right) \right\}.$$

Aufgabe 2:

a) Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x+y) \,+\, y e^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)^T$ auf und geben Sie eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \le 0.1$ und $|y| \le 0.1$ an.

b) (i) Zeigen Sie, dass $(x,y) = (0,0)^T$ ein singulärer Punkt der implizit definierten Kurve

$$\left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist und stellen Sie fest, ob dies ein isolierter Punkt, ein Rückkehrpunkt oder ein Doppelpunkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es keine weiteren singulären Punkte gibt.