**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

**WS 2001/2002**

# A n a l y s i s III

## 3. Übung

### Aufgabe 9:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *positiv homogen vom Grad k*, falls für alle $t > 0$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$f(t\boldsymbol{x}) \quad = \quad t^k\, f(\boldsymbol{x}). \qquad\qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass eine auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbare Funktion $f$ genau dann positiv homogen vom Grad $k$ ist, wenn sie der partiellen Differentialgleichung $\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = k\, f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ genügt.

   *Hinweis:* $\Rightarrow$: Differentiation von $(*)$, $\Leftarrow$: Untersuchung von $\phi(t) := f(t\boldsymbol{x})/(t^k f(\boldsymbol{x}))$.

b) Geben Sie Beispiele für positiv homogene Funktionen von Grad 1 oder 2 an.

### Aufgabe 10:

a) Ermitteln Sie das Taylor-Polynom $T_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion $f(x,y) := e^x \cos y$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ sowie das zugehörige Restglied $R_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$.

   Schätzen Sie den Fehler $|R_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)|$ auf den Quadrat $[-1/4, 1/4]^2$ nach oben ab.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x,y,z) \ := \ z^2\, e^{x\cos y}$$

   zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, \pi/2, 0)^{\mathrm{T}}$. Verwenden Sie dazu einmal den Taylorschen Satz (17.3.9) mit der Berechnung der partiellen Ableitungen und zum Zweiten die bekannten Reihenentwicklungen der auftretenden elementaren Funktionen in einer Variablen.

**Aufgabe 11:**

Unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang $U$ ist dasjenige mit größtem Flächeninhalt $F$ zu bestimmen.

Verwende Sie dazu die *Formel von Heron*:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s := U/2$ und $a, b$ und $c$ die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks bezeichnen.

**Aufgabe 12:**

a) Man zeige: Die Funktion $f(x, y) := 3x^4 - 4x^2y + y^2$ besitzt in $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$ kein lokales Minimum.

b) Man bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = \cos(2x) + \cos(x + y)$. Skizze!

**Abgabetermine:** 26.11. – 30.11.2001 **vor** der Übung.