Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

WS 2001/2002

A n a l y s i s III

1. Übung

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ berechne man das Gradientenfeld $\nabla f(x,y)$ und skizziere die Höhenlinien $f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$ von f für verschiedene Werte von C.

a) $f(x,y) = x - 2\,y,$

b) $f(x,y) = x\,y,$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0),$

d) $f(x,y) = y^2\,(x-1) + x^2\,(x+1)\,.$

Hinweis zu d): Verwenden Sie die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf, contour, gradient* und *quiver.*

Aufgabe 2:

a) Für die Funktionen

$$f(x,y) := \ln(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad g(x,y) := \arctan(y/x)$$

gebe man jeweils den (maximalen) Definitionsbereich an, berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und bestimme Δf und Δg.

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z = f(x^0,y^0) + f_x(x^0,y^0)\,(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)\,(y-y^0)$$

Man bestimme jeweils die Tangentialebene von f und g aus a) im Punkt $(x^0,y^0) = (2,1)$.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Funktion $f,\ g,\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \sin^2(xy), \quad g(x,y) := \sqrt{y^2+4}\,\ln(x^2+1), \quad h(x,y) := y\,\sqrt{2x^2+y^2}.$$

a) Man berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen.

b) Man überprüfe, ob h eine C^1–Funktion ist.

c) Man berechne die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung h_{xy} und h_{yx} und überprüfe, ob h eine C^2–Funktion ist.

Aufgabe 4:

Für zwei parallel geschaltete Ohmsche Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen ein Gesamtwiderstand R mit $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

a) Man veranschauliche sich die hierdurch gegebene Funktion $R = f(R_1, R_2)$ durch Skizzierung einiger Höhenlinien (etwa für $R = 1,\ 1/2,\ 1/4, \ldots$).

b) Man berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung und den Gradienten $\nabla f(R_1, R_2)$.

c) Man zeige, dass der Gradient ∇f im Punkt $(2, 2/3)$ senkrecht steht auf der Höhenlinie durch diesen Punkt.

Abgabetermine: 29.10. – 2.11.2001 **vor** der Übung.