

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuchen Sie welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

a)
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2(1 - x^2)^n$$

b)
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n - 1)x)}{(2n - 1)^2}$$

c)
$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^3}{n + 1}$$

Hinweis: Fehler der Teilsummen alternierender Reihen.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2} \right) z^n$$

e)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 7:

- a) Man berechne die Taylorreihen für $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in den Entwicklungspunkten $x_0 = 0$ und x_0 für $|x_0| \neq 1$ und bestimme die zugehörigen Konvergenzradien in Abhängigkeit von x_0 .
- b) Konvergieren die Potenzreihen, wenn man als Entwicklungspunkte $x_0 = \pm 2$ wählt? Falls ja, gebe man deren Konvergenzintervalle an. Gehören die Randpunkte dazu?
- c) Unter Benutzung von

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}}$$

und der geometrischen Reihe erstelle man eine Potenzreihe in $z_0 = i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 8:

- a) Man bestimme die Glieder bis zur 4. Ordnung von Potenzreihenentwicklungen um den Nullpunkt für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

nach den folgenden Methoden

- (i) Taylorentwicklung
- (ii) über die geometrische Reihe gemäß $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (1 - \cos x)}$
- (iii) über die Rekursionsformel aus dem Cauchyprodukt (Buch Satz 11.2.13 e).
- b) Man begründe das Ergebnis. Was muß dazu bewiesen werden?

Hinweise:

- a) **Abgabetermin:** 28.04.-29.04.2003 (zu Beginn der Übung)
- b) Am Donnerstag, dem 1. Mai, finden keine Übungen statt. Die Teilnehmer der Donnerstagsübungen werden deshalb gebeten, ausnahmsweise an einer der Übungsgruppen am Montag oder Dienstag teilzunehmen und die Aufgaben dort abzugeben.
- c) Um Verwechslungen zu vermeiden, werden alle Übungsteilnehmer **dringend** ersucht, die Gruppennummer auf den Aufgabenblättern anzugeben.