Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg
Sommersemester 2025

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar:
  Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2,
  5. Auflage. WILEY-VCH, Weinheim, 2020.

SEKUNDÄR:

- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 1,
  Birkhäuser Verlag, 1998.
- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 2,
  Birkhäuser Verlag, 1998.

Inhalte Komplexe Funktionen.

Funktionentheorie bzw. Komplexe Analysis:

- Funktionen einer komplexen Variablen
- Möbius-Transformationen
- Komplexe Differentiation und Integration
- Ebene Potentialprobleme
- Konforme Abbildungen
- Cauchysche Integralformel und Anwendungen
- Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen
- Isolierte Singularitäten und Residuen
- Integraltransformationen: Fourier- und Laplace-Transformation
- Shannon-Abtasttheorem

1 Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen alle Gleichungen der Form

$$x^2 = a \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.

Gute Nachricht:
Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Beispiel: Für $a = -1$ gibt es keine reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Um alle Gleichungen der Form $x^2 = a$ lösen zu können, müssen wir den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern. Diese `Zahlbereichserweiterung` führt uns zum `Körper der komplexen Zahlen`, $\mathbb{C}$.

Im folgenden wird die (algebraische und geometrische) Struktur von $\mathbb{C}$ diskutiert.

Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

Startpunkt: Verwende *symbolische Lösung* i für Gleichung $x^2 + 1 = 0$, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl i heißt imaginäre Einheit.

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf $\mathbb{C}$ ein.

- **Addition:**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Multiplikation:**

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1) \qquad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt $\mathbb{C}$ eine algebraische Struktur.

Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen.

- Was ist eigentlich i?
- Kann man mit den obigen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in $\mathbb{C}$ geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

Erinnerung: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden zusammen mit der Addition und der Multiplikation einen Körper. Es gelten folgende Körperaxiome.

- Axiome der Addition.

Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x + (y + z)$	$=$	$(x + y) + z$
Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + y$	$=$	$y + x$
Existenz der Null	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, 0 \in \mathbb{R}:$	$x + 0$	$=$	x
Existenz des Inversen	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists - x \in \mathbb{R}:$	$x + (-x)$	$=$	0

- Axiome der Multiplikation.

Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(xy)z$	$=$	$x(yz)$
Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	xy	$=$	yx
Existenz der Eins	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, 1 \in \mathbb{R}:$	$x \cdot 1$	$=$	x
Existenz des Inversen	$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}:$	xx^{-1}	$=$	$1.$

- Distributivgesetz $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

Ausgangspunkt: Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ mit **Addition**

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2) := (a_1+a_2, b_1+b_2) \qquad \text{für } (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$$

und **Multiplikation**

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) := (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1) \qquad \text{für } (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Beobachtung: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a,b) \qquad \text{für } (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $(1,0) \in \mathbb{C}$ ist neutrales Element der Multiplikation. Die Gleichung

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0) \qquad \text{für } (a,b) \neq (0,0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das multiplikative Inverse zu (a,b),

$$(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Zur Struktur der komplexen Zahlen.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen, ab sofort bezeichnet mit $\mathbb{C}$.

Übung:
Weise Axiome der Addition und Multiplikation sowie Distributivgesetz nach. □

Beobachtung: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi(a) = (a, 0)$ ist injektiv. Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 a_2) &= (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \end{aligned}$$

Fazit:

- Können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{C}$;
- Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ sind konsistent mit den Rechenregeln in $\mathbb{R}$.

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

Bemerkung: Die reellen Zahlen bilden einen angeordneten Körper; es gelten die folgenden Anordnungsaxiome.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Frage: Ist der Körper der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, angeordnet?

Antwort: NEIN!

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$. ■

Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

Vereinfachung der Notationen:

- Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a statt $(a, 0)$;
- Die komplexe Einheit $(0, 1)$ notieren wir mit i;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl (a, b) schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib.$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Fazit: Wir haben mit $\mathbb{C}$ einen Körper konstruiert, der $\mathbb{R}$ umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in $\mathbb{C}$ lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten $\pm i$.

Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit z oder w. Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z, kurz

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{und} \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z+w) &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Im}(z+w) &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Re}(az) &= a\mathrm{Re}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(az) &= a\mathrm{Im}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{für } z \neq 0.$$

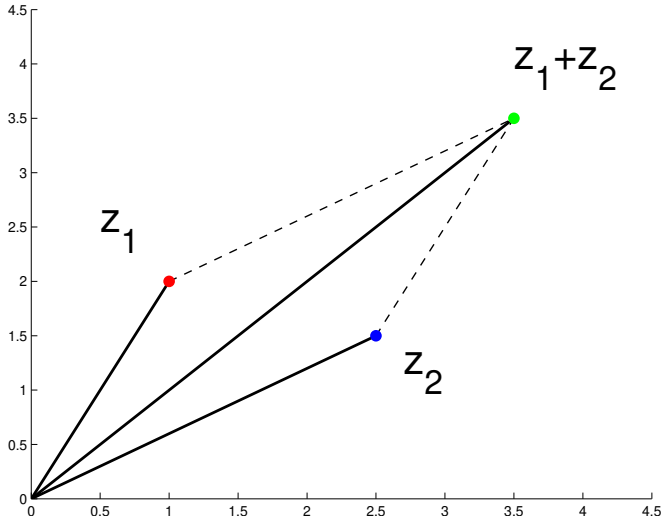
Die komplexe Zahlenebene.

Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als Punkt in der

komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$, mit einer reellen Achse, $\mathbb{R}$, und einer imaginären Achse, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometrische Veranschaulichung der Addition:
Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



Addition zweier komplexer Zahlen.

Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$\overline{w+z}$	$=$	$\overline{w}+\overline{z}$	für $w, z \in \mathbb{C}$
$\overline{wz}$	$=$	$\overline{w}\cdot\overline{z}$	für $w, z \in \mathbb{C}$
$\overline{(\overline{z})}$	$=$	z	für $z \in \mathbb{C}$
$z\overline{z}$	$=$	x^2+y^2	für $z = x+iy \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}(z)$	$=$	$(z+\overline{z})/2$	für $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}(z)$	$=$	$(z-\overline{z})/(2i)$	für $z \in \mathbb{C}$

Insbesondere gilt $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Die Betragsfunktion.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den Betrag von z sowie $|w - z|$ für den Abstand zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt $|z| = |z - 0|$ den euklidischen Abstand von z zum Ursprung dar.
- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \le \mathrm{Re}(z) \le |z| \qquad \text{und} \qquad -|z| \le \mathrm{Im}(z) \le |z| \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Satz: Die Betragsfunktion liefert eine Norm auf $\mathbb{C}$, denn es gelten die Relationen

- $|z| \ge 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \le |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den Polarkoordinaten

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die Eulersche Formel

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt.

Der Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wird ebenso als Argument von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Beispiel: $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, somit gilt $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$.

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als Drehstreckung in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \qquad \text{und} \qquad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i\sin(\psi))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi)).$$

Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die n-te Potenz z^n, $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als n-te Einheitswurzeln bezeichnet.

2 Komplexe Funktionen

Wir betrachten komplexwertige Funktionen f einer komplexen Variablen.

2.1 Begriff und geometrische Deutung

Definition: *Eine* komplexe Funktion *ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Punktmengen der komplexen Ebene sind.* □

Bemerkung: Eine komplexe Funktion $f : A \longrightarrow B$ mit Definitionsbereich $A \subset \mathbb{C}$ und Wertebereich $B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = f(z) \in B$ zu.

Im konkreten Fall ist diese eindeutige Zuordnung

$$f : z \longmapsto f(z) \qquad \text{für } z \in A$$

durch eine *explizite* Abbildungsvorschrift gegeben.

Allerdings lassen sich (komplexe) Funktionen auch *implizit* definieren.

Beispiele für komplexe Funktionen.

- $f(z) = (3z+1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Man verwendet üblicherweise das Symbol $z \in \mathbb{C}$ für das Urbild und $w \in \mathbb{C}$ für den Wert von f, also $w = f(z)$. Weiterhin notieren wir $z = x + iy$ und

$$w = u + iv \qquad \text{d.h. } u = \mathrm{Re}(w) \text{ und } v = \mathrm{Im}(w)$$

bzw.

$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \qquad \text{und } v(z) = \mathrm{Im}(f(z)).$$

Frage: Wie stellen wir f graphisch dar?

Antwort: Wir skizzieren den Definitionsbereich und den Wertebereich in zwei verschiedenen komplexen Ebenen, der z-Ebene (Urbildebene) und der w-Ebene (Bildebene).

Komplexe Funktionen einer reellen Variablen.

Wir betrachten gelegentlich *komplexwertige* Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ mit einer *reellen* Variablen, d.h. für einen Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$,

$$f : t \longmapsto f(t) \in \mathbb{C} \qquad \text{für } t \in I.$$

Beispiele.

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $b \neq 0$;
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$;

2.2 Lineare Funktionen

Definition: *Eine komplexe Funktion* f *heißt* linear, *falls* f *für feste komplexe Konstanten* $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, *eine Darstellung der folgenden Form besitzt.*

$$f(z) = az + b \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

□

Frage: Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

Spezialfall 1: Die Wahl $a = 1$ führt zu einer Translation um b,

$$f(z) = z + b \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Spezialfall 2: Die Wahl $a \in (0, \infty)$ und $b = 0$ führt zu einer Streckung bzw. Stauchung,

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

d.h. das Urbild z wird gestreckt $(a > 1)$ oder gestaucht $(0 < a < 1)$.
Allgemein spricht man von einer Skalierung mit Skalierungsfaktor $a > 0$.

Spezialfall 3: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $b = 0$ führt zu einer Drehung (bzw. Rotation)

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

genauer: Drehung um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei $\alpha = \arg(a)$, bzw. $a = \exp(i\alpha)$.

Spezialfall 4: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $b = 0$ führt zu einer Drehstreckung

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.

Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und Skalierung um $|a|$.

Allgemeiner Fall: Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben:

- $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $f_2(z) = |a|z$ eine Streckung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$;
- $f_3(z) = z + b$ eine Verschiebung um den Vektor b.

Bemerkung: Drehung f_1 und Streckung f_2 kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2.$$

□

2.3 Quadratische Funktionen

Definition: *Eine komplexe Funktion* f *heißt* quadratisch, *falls* f *für feste Konstanten* $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, *eine Darstellung der folgenden Form besitzt.*

$$f(z) = az^2 + bz + c \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

□

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f.

Setze $w = z^2$. Dann ergibt die für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{und} \qquad v = 2xy.$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto z^2$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y_0^2 \\ v &= 2xy_0 \end{aligned}$$

Für $y_0 = 0$ (die x-Achse) bekommen wir $u = x^2$ und $v = 0$.

Für $y_0 \neq 0$ können wir x mit $x = v/(2y_0)$ eliminieren, und bekommen somit

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$$

eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur u-Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -y_0^2$ (mit u-Achse) und $v = \pm 2y_0^2$ (v-Achse).

Fazit: Die Schar zur x-Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar konfokaler (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $y \equiv y_0$ und $y \equiv -y_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto z^2$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= x_0^2 - y^2 \\ v &= 2x_0 y \end{aligned}$$

Für $x_0 = 0$ (die y-Achse) bekommen wir $u = -y^2$ und $v = 0$.

Für $x_0 \neq 0$ können wir y mit $y = v/(2x_0)$ eliminieren, und bekommen somit

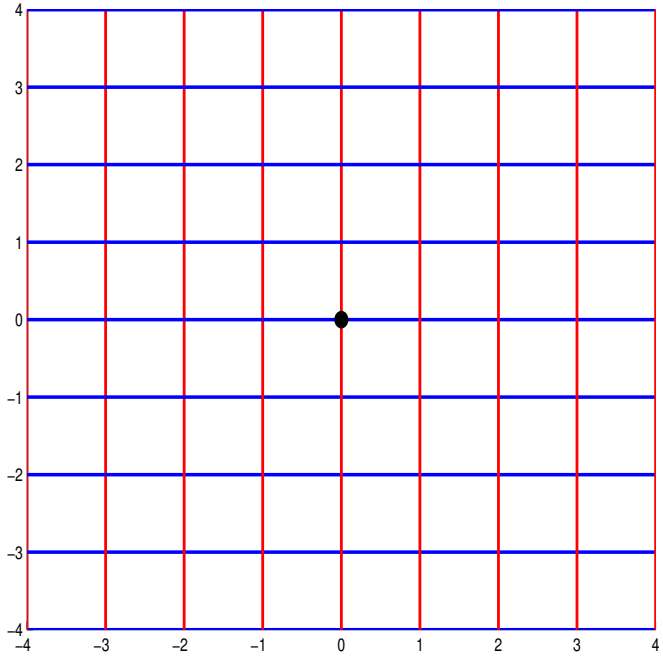
$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur u-Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -x_0^2$ (mit u-Achse) und $v = \pm 2x_0^2$ (v-Achse).

Fazit: Die Schar zur y-Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $x \equiv x_0$ und $x \equiv -x_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto z^2$.



Urbild.

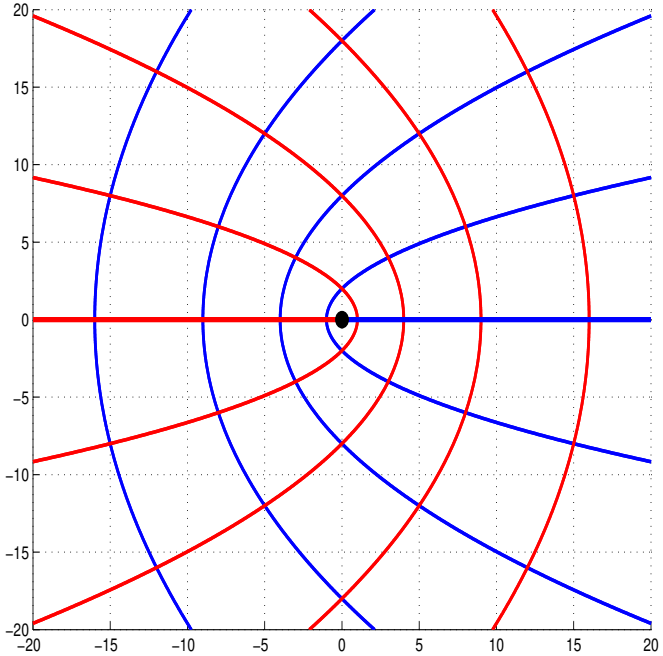


Bild von $f(z) = z^2$.

Allgemeine quadratische Funktionen.

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- der Translation $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$;
- der quadratischen Funktion $f_2(z) = z^2$;
- der Drehstreckung $f_3(z) = az$;
- der Translation $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

□

2.4 Die Exponentialfunktion

Definition: *Die* komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist definiert durch*

$$\exp(z) \equiv e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \qquad \textit{für } z = x + iy.$$

□

Beachte: Es gilt das Additiontheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \qquad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie sieht die komplexe Exponentialfunktion $z \longmapsto \exp(z)$ aus?

Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x \sin(y).$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y_0) \\ v &= e^x \sin(y_0) \end{aligned}$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

- Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

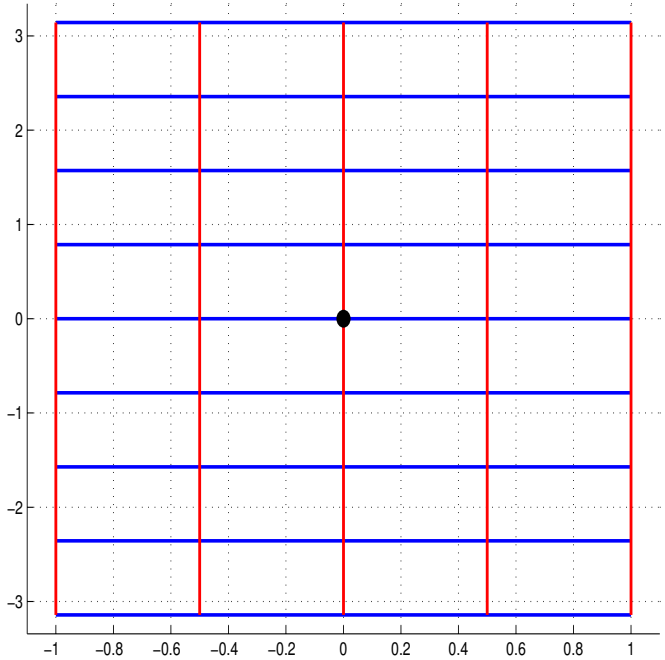
Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0}\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0}\sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ `winkeltreu` (bzw. `konform`). Genauere Details dazu später.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \longmapsto \exp(z)$.



Urbild.

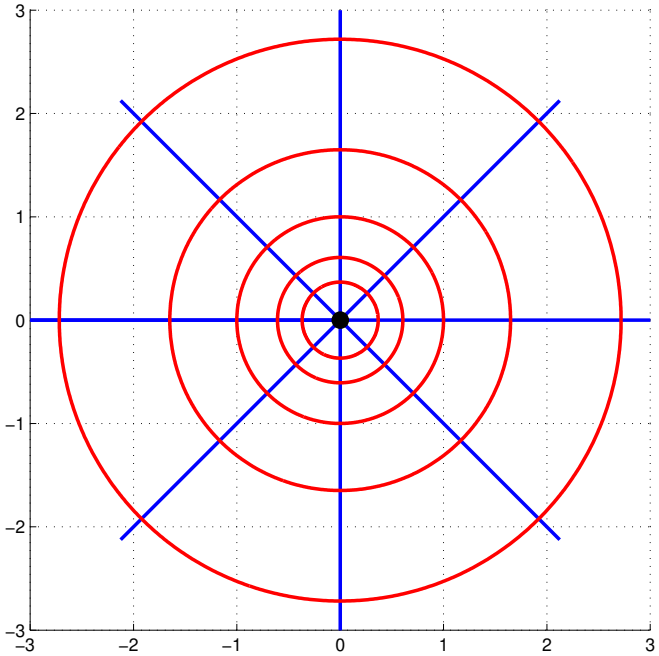


Bild von $f(z) = \exp(z)$.

2.5 Die Umkehrfunktion

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$ *heißt* eineindeutig *(*injektiv*), wenn es zu jedem Punkt* $w \in \mathbb{C}$ *ihres Wertebereichs genau einen Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *ihres Definitionsbereichs gibt mit* $f(z) = w$. □

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereichs genau einmal an.
- Man nennt injektive Funktionen auch schlicht.

Beispiele.

- die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Bemerkung: Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0$$

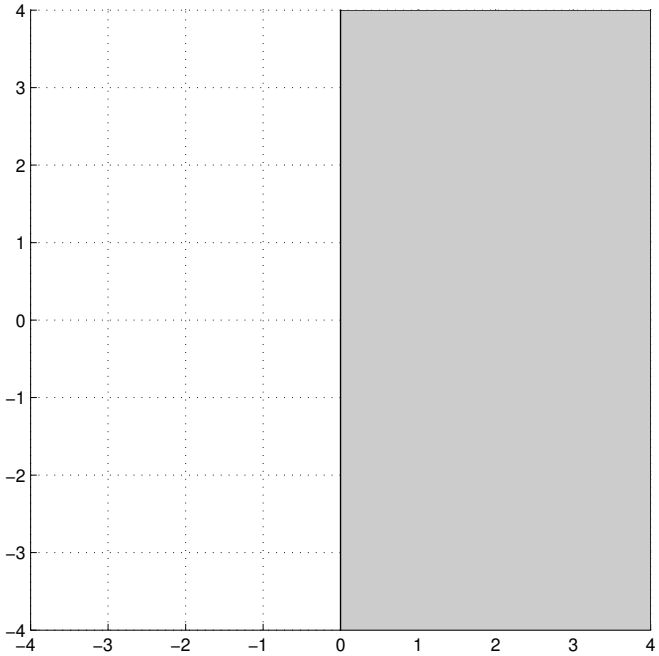
auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die aufgeschnittene komplexe Ebene

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\} \end{aligned}$$

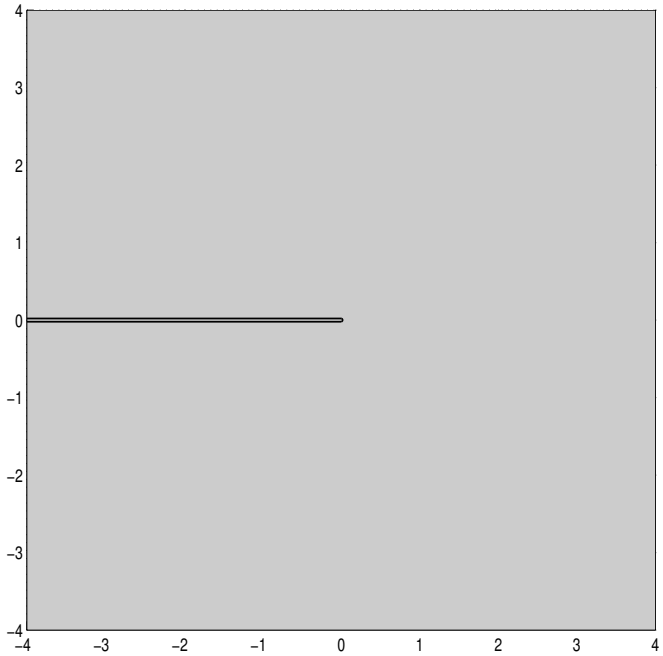
□

Wertebereich von $z \longmapsto z^2$ auf rechter Halbebene.



Die rechte Halbebene

(Definitionsbereich)



Die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

(Wertebereich)

Umkehrfunktion.

Definition: *Sei* f *eine injektive Funktion mit Definitionsbereich* $D(f)$ *und Wertebereich* $W(f)$. *Dann ist die* Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \longrightarrow D(f)$ *zu* f *diejenige Funktion, die jedem Punkt* $w \in W(f)$ *den (eindeutigen) Punkt* $z \in D(f)$ *mit* $f(z) = w$ *zuordnet, d.h. es gilt* $f^{-1}(w) = z$ *bzw.*

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z \qquad \text{für alle } z \in D(f) \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w \qquad \text{für alle } w \in W(f) \end{aligned}$$

□

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \,|\, r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den Hauptwert der Wurzel $f^{-1} : W(f) \longrightarrow D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Umkehrfunktion der n-ten Potenz.

Beispiel: Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

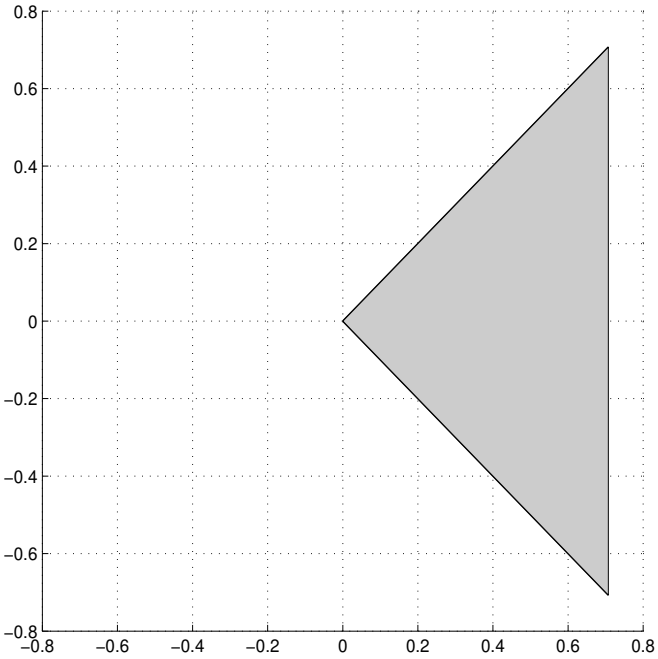
injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \longrightarrow D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

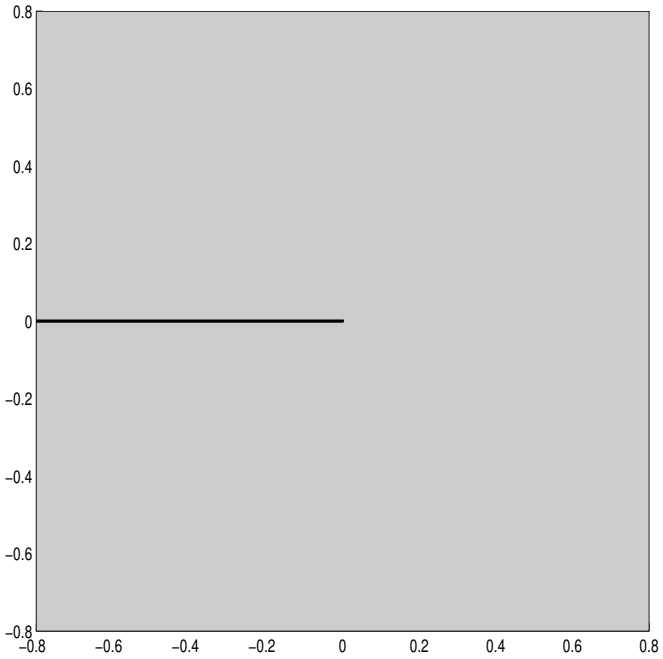
□

Beispiel $n = 4$: Betrachte die Funktion $z \longmapsto z^4$.



$\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in (-\pi/4, \pi/4)\}$

(Definitionsbereich)



Die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

(Wertebereich)

2.6 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Ziel: Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Beachte: Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist für *alle* $z \in \mathbb{C}$ erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den Definitions- und Wertebereich.

Aber: Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf $\mathbb{C}$.

Also: Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ von exp müssen wir den Definitionsbereich von exp geeignet einschränken.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$. Welche Werte $w = u + iv$ kommen in Frage, so dass

$$e^w = z$$

gilt?

Konstruktion des komplexen Logarithmus.

Ausgangspunkt: Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \qquad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \log(|z|)$, wobei $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.

Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$. Daher besteht die Menge der Lösungen von $e^w = z$ aus den komplexen Zahlen

$$w = \log(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

und jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt Logarithmus von z. Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet die Menge $\{\mathrm{Log}(z)\} := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$ den mengenwertigen komplexen Logarithmus von z. □

Der mengenwertige komplexe Logarithmus.

Beispiel 1: Wie sieht der komplexe Logarithmus $\{\mathrm{Log}(-1)\}$ von -1 aus?

Zunächst gilt $\log(|-1|) = \log(1) = 0$.

Die Zahlen $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ sind die Argumente von -1. Somit gilt

$$\{\mathrm{Log}(-1)\} = \{i(2k+1)\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von -1.

Beispiel 2: Wie sieht der komplexe Logarithmus $\{\mathrm{Log}(-1+i)\}$ von $-1+i$ aus?

Zunächst gilt $|-1+i| = \sqrt{2}$ und weiterhin ist $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ ein mögliches Argument von $-1+i$. Somit gilt

$$\{\mathrm{Log}(-1+i)\} = \left\{ \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für die Werte des Logarithmus von $-1+i$.

Beispiel 3: Für $x > 0$ gilt $\{\mathrm{Log}(x)\} = \{\log(x) + 2\pi i k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < \mathrm{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist $\mathbb{C}^-$.

Der einzige Wert von $\{\mathrm{Log}(z)\}$, der zu dem Streifen S gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \qquad \text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert des Logarithmus von z, kurz $\mathrm{Log}(z)$. □

Bemerkung: Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene $\mathbb{C}^-$ definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\mathrm{Log}(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\mathrm{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein. □

Die allgemeine Potenz.

Definition: *Für* $a, b \in \mathbb{C}$ *bezeichnet* $\{a^b\}$ *die Menge der komplexen Zahlen*

$$e^{b\{\mathrm{Log}(a)\}} \qquad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\{\mathrm{Log}(a)\} = \{\log(|a|) + i(\arg(a) + 2\pi k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Somit gilt*

$$\{a^b\} = \left\{ e^{b\,[\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k)]} \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. *Liegt* a *in der aufgeschnittenen komplexen Ebene,* $a \in \mathbb{C}^-$, *so enthält die Menge* $\{a^b\}$ *den Wert*

$$e^{b\mathrm{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|)+i\alpha)} \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert *von* $\{a^b\}$. □

Beispiele.

1.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\{a^b\} &= \left\{e^{n(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{n\log(r)+in\alpha+2\pi ikn} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{r^n e^{in\alpha} e^{2\pi ikn} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}\end{aligned}$$

2.) Für $x > 0$ ist $e^{i\mathrm{Log}(x)} = \cos(\log(x)) + i\sin(\log(x))$ Hauptwert von $\{x^i\}$.

3.) Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\{a^{1/n}\} &= \left\{e^{(1/n)(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \,\middle|\, 0 \le k < n\right\}\end{aligned}$$

d.h. die Werte z von $\{a^{1/n}\}$ sind die n-ten Wurzeln von a, so dass $z^n = a$, kurz

$$z = \sqrt[n]{a}$$

mit Hauptwert $r^{1/n} e^{i\alpha/n}$ für $\alpha/n = \arg(a)/n \in (-\pi/n, \pi/n)$. □

Bemerkung.

Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^-$ mit

$$\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b),$$

Beispiel: Für $a = i$ und $b = -1 + i$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(i) + \mathrm{Log}(-1+i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \mathrm{Log}(-1-i) = \mathrm{Log}(i(-1+i)). \end{aligned}$$

Weitere Bemerkung. Es gilt die Gleichung

$$\text{Hauptwert von } \{a^b\} \cdot \text{Hauptwert von } \{a^c\} = \text{Hauptwert von } \{a^{b+c}\}.$$

Beweis: Mit $\alpha := \arg(a) \in (-\pi, \pi)$ ist

$$A := e^{b[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^b\} = \left\{e^{b[\log(|a|)+i(\alpha+2\pi k)]}\right\}$. Genauso ist

$$B := e^{c[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^c\}$ und

$$C := e^{(b+c)[\log(|a|)+i\alpha]}$$

der Hauptwert von $\{a^{b+c}\}$.

Schließlich gilt

$$A \cdot B = e^{b[\log(|a|)+i\alpha]} \cdot e^{c[\log(|a|)+i\alpha]} = e^{(b+c)[\log(|a|)+i\alpha]} = C.$$

■

2.7 Die Joukowski-Funktion

Die Joukowski-Funktion, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Strömungsproblemen von Interesse (Details später).

Beobachtung: Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \qquad \text{für } z \neq 0.$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv \text{const}$ und der Strahlen $\arg(z) \equiv \text{const}$.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für

$$z = re^{i\varphi} \qquad \text{und} \qquad w = u + iv$$

bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$$

und somit

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi).$$

Für das Bild des Kreises $r \equiv r_0 > 0$ bekommen wir die Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\left(r_0 + \tfrac{1}{r_0}\right)\cos(\varphi) \\ v &= \tfrac{1}{2}\left(r_0 - \tfrac{1}{r_0}\right)\sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

für den Einheitskreis $r_0 \equiv 1$ somit $u = \cos(\varphi)$, für $0 \le \varphi < 2\pi$, und $v \equiv 0$, also die Strecke zwischen den Punkten -1 und 1, die *zweimal* durchlaufen wird. □

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für $r_0 \neq 1$ können wir φ eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2}\left|r_0 - \frac{1}{r_0}\right|$$

und Brennpunkten ± 1 bekommt.

Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet eine Schar von Kreisen $r \equiv \text{const}$ auf eine Schar `kofokaler Ellipsen` ab. Die beiden Kreise $r \equiv r_0$ und $r \equiv 1/r_0$ werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet. □

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für das Bild eines Strahls $\varphi \equiv \varphi_0$ bekommt man

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\left(r + \tfrac{1}{r}\right)\cos(\varphi_0) \\ v &= \tfrac{1}{2}\left(r - \tfrac{1}{r}\right)\sin(\varphi_0) \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < \infty,$$

für die positive x-Achse $\varphi_0 = 0$ somit

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\left(r + \tfrac{1}{r}\right) \\ v &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < \infty,$$

das Stück $\{(u, 0) \,|\, 1 \leq u < \infty\}$ der u-Achse.

Analog erhalten wir für die negative x-Achse $\varphi_0 = \pi$ das Stück $-\infty < u < -1$.

Die Strahlen $\varphi_0 = \pi/2$ (positive y-Achse) und $\varphi_0 = 3\pi/2$ (negative y-Achse) werden auf die komplette v-Achse abgebildet.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Falls $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, so können wir r eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

mit den Halbachsen

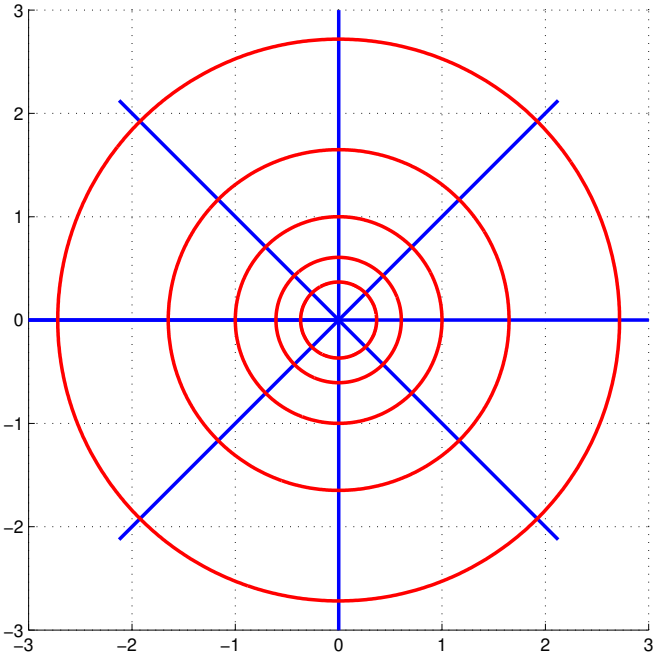
$$a = |\cos(\varphi_0)| \qquad \text{und} \qquad b = |\sin(\varphi_0)|$$

bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Somit liegen die beiden Brennpunkte bei ± 1.

Bilder unter der Joukowski-Funktion.



Urbild.

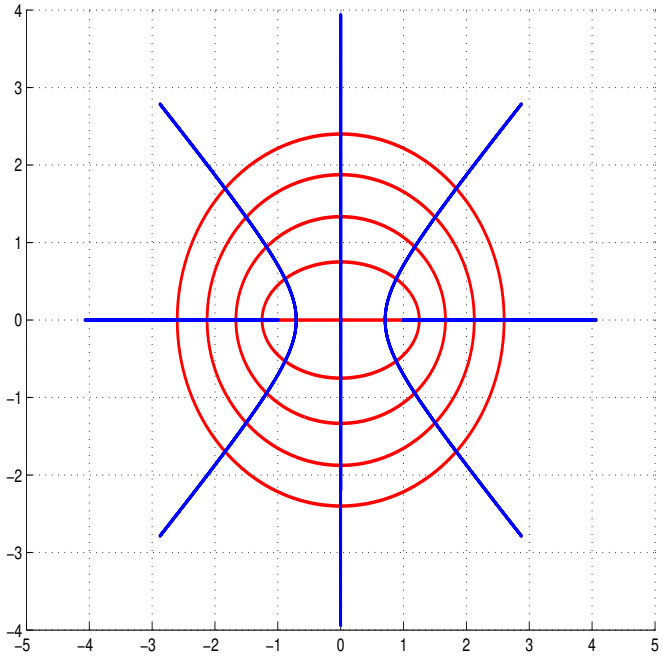


Bild der Joukowski-Funktion.

Weitere Bemerkungen zur Joukowski-Funktion.

Bemerkung und Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski-Funktion ist winkeltreu.

Bemerkung: Die Joukowski-Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nicht* injektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$ gilt $z \neq 1/z$, aber $f(z) = f(1/z)$.

Bemerkung: Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski-Funktion injektiv.

(a) Auf dem Komplement des Einheitskreises $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$.

(b) Auf der oberen Halbebene $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Bemerkung: Die Umkehrfunktion $w = f^{-1}(z)$ der Joukowski-Funktion $f(w)$ bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach w in dem jeweiligen Definitionsbereich $D(f)$, somit $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$. □

2.8 Komplexe trigonometrische Funktionen

Die Beziehungen der Eulerschen Formel sind für $x \in \mathbb{R}$ schon bekannt.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x) \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion die Formeln

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind jedoch auch für beliebige komplexe Argumente definiert. Somit setzen wir

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Rechenregeln für trigonometrische Funktionen.

Es gilt

$$\begin{aligned}\cos(z+2\pi) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\\ &= \cos(z)\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fazit: Die komplexen trigonometrischen Funktionen sin und cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π. □

Weitere Rechenregeln.

Symmetrie.

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \\ \sin(z) &= -\sin(-z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{i\pi/2} - e^{-iz}e^{-i\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos(z) \end{aligned}$$

Zerlegung der Eins.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme.

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

3 Möbius-Transformationen

3.1 Die stereographische Projektion

Vorbemerkungen: Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die *Lücken* des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von $q(z)$) dadurch zu schließen, dass man $R(z)$ dort den "Wert" ∞ zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler $p(z)$ dort verschwindet.

Notation: Falls $z^* \in \mathbb{C}$ Nullstelle von q, d.h. $q(z^*) = 0$, und $p(z^*) \neq 0$, so schreibt man $R(z^*) := \infty$, d.h. der Wertebereich von R wird um die "Zahl" ∞ erweitert.

Definition: *In der Erweiterung* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *der komplexen Zahlenebene wird* ∞ *als* `unendlich ferner Punkt` *bezeichnet.* □

Erweiterung der Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$.

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene C^* werden folgende Rechenregeln (zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in $\mathbb{C}$) vereinbart.

$$\begin{aligned} a + \infty &:= \infty && \text{für } a \in \mathbb{C} \\ a \cdot \infty &:= \infty && \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ a/\infty &:= 0 && \text{für } a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Warnung: Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$ und $\infty \pm \infty$ lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

Topologische Bedeutung: Die erweiterte komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}^*$ ist ein topologischer Raum. Für eine komplexe Zahlenfolge $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$, gilt

$$z_n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/z_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\mathbb{C}^*$ ist folgenkompakt, d.h. *jede* Folge in $\mathbb{C}^*$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird $\mathbb{C}^*$ als Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ bezeichnet. □

Die stereographische Projektion.

Definition: *Die* stereographische Projektion *ist diejenige Abbildung* $P : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *der* Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ *auf die erweiterte komplexe Ebene* $\mathbb{C}^*$*, die jedem Punkt* $X \in \mathbb{S}^2$*,* $X \neq N = (0,0,1)^T$*, den Durchstoßpunkt* $P(X)$ *der Geraden durch* X *und* N *durch die* X_1*-*X_2*–Ebene zuordnet, und weiterhin* $P(N) := \infty$*.*

Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

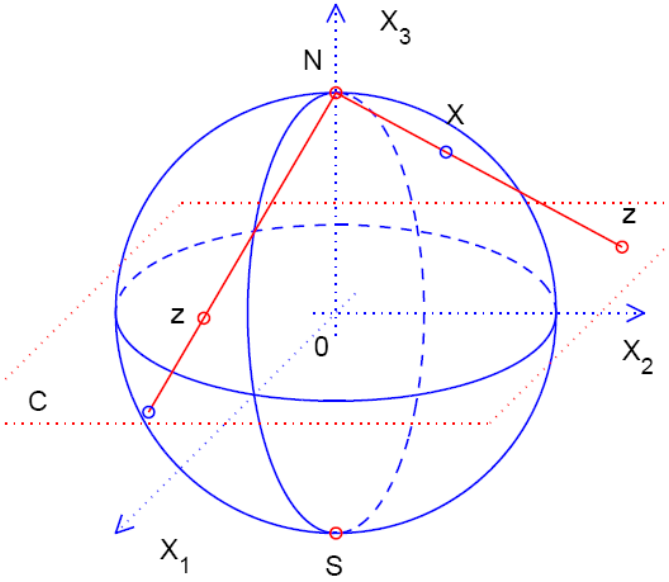
$$z = P(X) = \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} \in \mathbb{C}^* \qquad \text{für } X = (X_1, X_2, X_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

Bemerkungen:

- Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ist bijektiv.
- Die Umkehrabbildung P^{-1} von P ist gegeben durch

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Die stereographische Projektion $P : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$.



- Die obere Hälfte der Sphäre $\mathbb{S}^2$ (die obere Halbkugel) wird durch P auf $|z| > 1$ abgebildet, die untere Hälfte (untere Halbkugel) wird auf $|z| < 1$ abgebildet.
  Der Äquator
  $$A = \{X \in \mathbb{S}^2 \,|\, X = (X_1, X_2, 0)^T\}$$
  bleibt fest, d.h. jeder Punkt $a \in A$ ist Fixpunkt von P, so dass $P(a) = a$. □

Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem sphärischen Bild U einer Menge $\mathrm{B} \subset \mathbb{C}^*$ verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass $\mathrm{P}(\mathrm{U}) = \mathrm{B}$.

Satz: *Für die stereographische Projektion gelten folgende Eigenschaften.*

- *Das sphärische Bild einer Geraden in $\mathbb{C}^*$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in $\mathbb{C}^*$ abgebildet.*
- *Das sphärische Bild eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht.*
- *Ein Kreis auf $\mathbb{S}^2$, der nicht durch N geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in $\mathbb{C}$ abgebildet.*
- *Die stereographische Projektion ist kreistreu.*

□

3.2 Möbius-Transformationen

Definition: *Eine rationale Abbildung der Form*

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{mit } ad \neq bc$$

heißt Möbius-Transformation. □

Bemerkungen: Für eine Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ gilt:

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$.
- $T(z)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$,

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Beachte:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Komposition von Möbius-Transformationen.

Satz: *Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist eine Möbius-Transformation. Genauer gilt:*

$$w = T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{für } ad \neq bc$$

$$u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta} \qquad \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma$$

$$= \frac{Az+B}{Cz+D}$$

mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

□

Kreistreue von Möbius-Transformationen.

Satz: *Möbius-Transformationen sind* kreistreu, *d.h. (verallgemeinerte) Kreise in* $\mathbb{C}^*$ *gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.*

Beweis: Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad \neq bc$ eine Möbius-Transformation.

Fall (a): Für $c = 0$ ist T linear und somit kreistreu.

Fall (b): Für $c \neq 0$ zerlegen wir T wie folgt.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass $f(z) = 1/z$ kreistreu ist.

Denn: Dann ist $T(z)$ (als Komposition kreistreuer Abbildungen) kreistreu.

Um zu zeigen, dass f kreistreu ist, wenden wir die (kreistreue!) stereographische Projektion auf $w = 1/z$ an.

Es gilt

$$X = P^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, \frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2$$

Für das Bild von $1/z$ unter P^{-1} bekommen wir somit

$$\begin{aligned} X' &= F(X) = P^{-1}(1/z) \\ &= \left(\frac{1/z+1/\bar{z}}{1+(1/z)(1/\bar{z})}, \frac{1/z-1/\bar{z}}{i(1+(1/z)(1/\bar{z}))}, \frac{(1/z)(1/\bar{z})-1}{1+(1/z)(1/\bar{z})} \right)^T \\ &= \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, -\frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})}, -\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} \right)^T \\ &= (X_1, -X_2, -X_3)^T \end{aligned}$$

Beachte: $F(X)$ beschreibt eine Drehung um die X_1-Achse um den Winkel π. Die Abbildung $F(X)$ ist offensichtlich kreistreu, und somit ist die Komposition

$$f(z) = P \circ F \circ P^{-1}$$

kreistreu. ■

Bemerkungen zu Möbius-Tranformationen.

Bemerkung: Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt $-d/c$ werden durch T auf Geraden in der w-Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der z-Ebene werden durch T in (verallgemeinerte) Kreise der w-Ebene durch den Punkt a/c abgebildet.
- Kreise, die *nicht* durch den Punkt $-d/c$ gehen, werden durch T in Kreise abgebildet, die *nicht* durch den Punkt a/c gehen.

□

Doppelverhältnisse und Möbius-Tranformationen.

Satz: *Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die Interpolationsbedingungen*

$$w_j = T(z_j) \qquad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt.

Die interpolierende Möbius-Transformation $T(z)$ ist gegeben durch die Dreipunkteformel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

□

Definition: *Der Ausdruck*

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

heißt das Doppelverhältnis *der Punkte z_0, z_1, z_2, z_3.* □

Beispiel.

Gesucht:

Eine Möbius-Transformation $T(z)$ mit $T(1) = i$, $T(i) = -i$ und $T(0) = 0$.

Nach der Dreipunkteformel bekommt man

$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

und somit (durch Auflösen nach w)

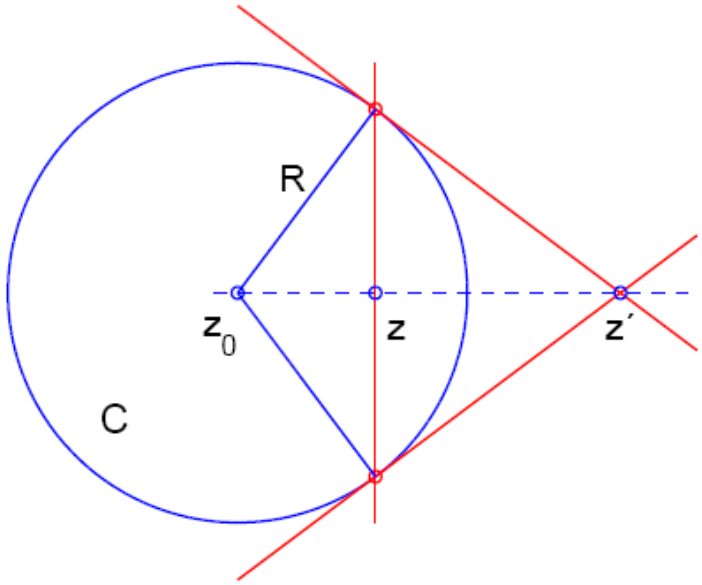
$$w = T(z) = \frac{(1+i)z}{(1+i)z-2i}.$$

Übungsaufgabe:

Überprüfe die Gültigkeit der obigen Interpolationsbedingungen an $T(z)$. □

Symmetrie zum Kreis.

Liegen die Punkte z und z' wie in der folgenden Abbildung, so sagt man, die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = R\}$.



Die Punkte z und z' liegen symmetrisch zum Kreis C.

□

Bemerkungen zu Symmetrien zum Kreis.

- Die Abbildung $z \longmapsto z'$ heißt Inversion am Kreis bzw. Spiegelung am Kreis.
- Ein Punkt z mit $|z - z_0| \leq R$ ist stets zu einem Punkt z' mit $|z' - z_0| \geq R$ symmetrisch.
- Gilt $|z - z_0| = R$, so ist z zu sich selbst symmetrisch, d.h. $z' = z$.
- Der Punkt $z = z_0$ ist zu $z' = \infty$ symmetrisch.
- Es gilt $(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$.

□

Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien.

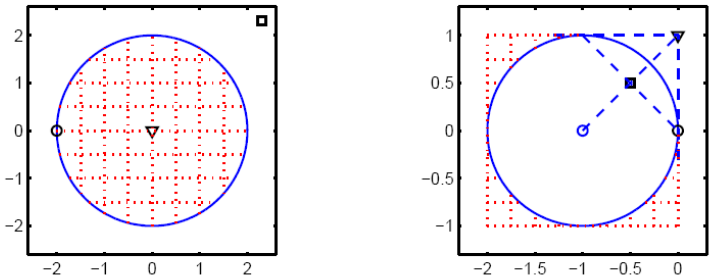
Satz:

Möbius-Transformationen erhalten Symmetrien zu (verallgemeinerten) Kreisen.

Genauer gilt:

Ist C ein (verallgemeinerter) Kreis in $\mathbb{C}^*$ und liegen z und z' symmetrisch zu C, so liegen die Bilder von z, z' unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in $\mathbb{C}^*$, der das Bild von C darstellt. □

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w + 1| = 1$ abbildet mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.



Lösung: $z_2 = 0$ und $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 = T(\infty)$ symmetrisch zum Kreis $|w + 1| = 1$ liegen. Somit gilt $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$ und damit $w_3 = 0.5(-1 + i)$.

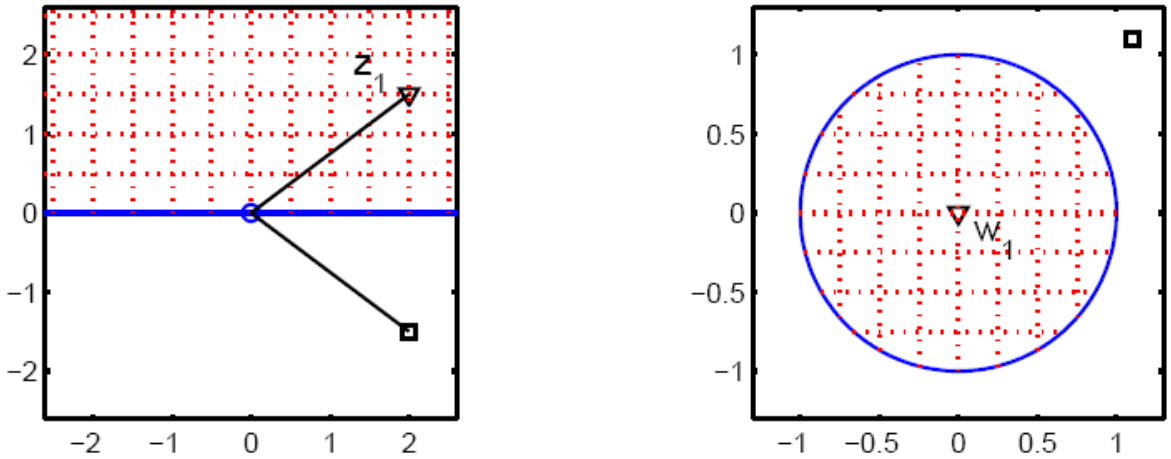
Mit der Dreipunkteformel folgt nun

$$\frac{w-0}{w-i} : \frac{w_3-0}{w_3-i} = \frac{z+2}{z-0} : \frac{z_3+2}{z_3-0}\bigg|_{z_3\to\infty},$$

und somit

$$w = T(z) = -\frac{z+2}{(1+i)z+2i}. \qquad \square$$

Beispiel. Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$, die die obere Halbebene $\mathrm{Im}(z) > 0$ auf die Kreisscheibe $|w| \leq 1$ abbildet und einen gegebenen Punkt z_1 mit $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ auf $w_1 = 0$ abbildet.



Lösung: Aus Symmetriegründen muss $z_2 = \overline{z_1}$ auf $w_2 = \infty$ abgebildet werden. Daraus folgt

$$w = c\,\frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}} \qquad \text{mit } |c| = 1.$$

□

Beispiel.

Für $b > a > 0$ betrachten wir die Möbius-Transformation

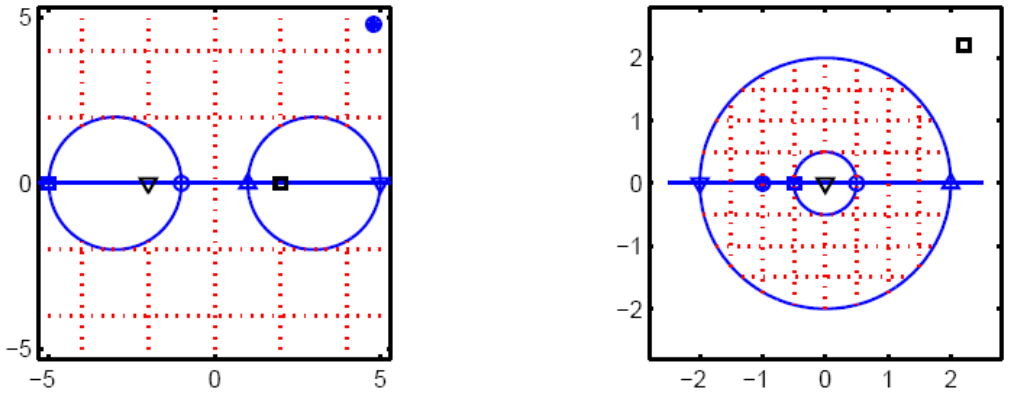
$$w = T(z) = \frac{z+p}{-z+p} \qquad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a,b)$$

Für die folgenden Auswertungen von T bekommen wir

$$\begin{aligned}
z_{1,2} = \pm p \quad &\to \quad w_{1,2} = \infty, 0 \\
z_{3,4} = a, b \quad &\to \quad w_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \pm\rho \text{ mit } \rho > 1 \\
z_{5,6} = -a, -b \quad &\to \quad w_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \pm\frac{1}{\rho} \\
z_{7,8} = 0, \infty \quad &\to \quad z_{7,8} = 1, -1.
\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Die x-Achse wird durch T auf die u-Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur x-Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur u-Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur x-Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur u-Achse liegen.



Relevante Anwendung: Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet. □

4 Analytische Funktionen

4.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Fragen:

- Wie *differenziert* man (sinnvollerweise) komplexe Funktionen?
- Wie definiert man *Grenzwerte* im Komplexen?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktionen?

Ansatz: Sei $f(z) : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

wobei $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertig. Setze weiterhin $z = x + iy$, so dass

$$f(z) \equiv f(x, y) \qquad u(z) \equiv u(x, y) \qquad v(z) \equiv v(x, y).$$

Komplexe Differentiale.

Voraussetzungen:

- Sei $z_0 = x_0 + iy_0$ ein fester Punkt im Definitionsbereich $D(f)$ von f.
- Es gebe eine (offene) Umgebung um z_0, in der die *reellen* Funktionen $u \equiv u(x,y)$, $v \equiv v(x,y)$ jeweils stetige partielle Ableitungen nach x, y haben, d.h. die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y sind stetig um (x_0, y_0).

Dann gilt:

- Es existieren die (totalen) Differentiale du und dv in (x_0, y_0).
- Mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ gilt (aus der reellen Analysis)

$$\begin{aligned} du &= u_x(x_0,y_0)dx + u_y(x_0,y_0)dy \\ dv &= v_x(x_0,y_0)dx + v_y(x_0,y_0)dy. \end{aligned}$$

Definition: *Unter dem* Differential *der Funktion* $f = u + iv$ *im Punkt* $z_0 = x_0 + iy_0$ *verstehen wir die (in* dx *und* dy*) lineare Funktion*

$$df = du + i dv.$$

Differentiale und partielle Ableitungen.

Mit $df = du + i dv$ hat das Differential von f in z_0 die Form

$$df = [u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)]\, dx + [u_y(x_0, y_0) + i v_y(x_0, y_0)]\, dy.$$

Wir stellen die Koeffizienten von df (bez. dx und dy) nun durch entsprechende partielle Ableitungen f_x, f_y von f dar. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad h \to 0 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i\,[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h}
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

Zur weiteren Form des Differentials.

Entsprechend gilt

$$f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

und somit bekommen wir insgesamt

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Nun: Stelle df in Abhängigkeit von dz (statt von dx und dy) dar. Schreibe dazu

$$dz = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = dx + idy.$$

Beachte: Es gilt

$$\overline{dz} = \overline{z - z_0} = dx - idy$$

und somit

$$dx = \frac{1}{2}\left(dz + \overline{dz}\right) \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{1}{2i}\left(dz - \overline{dz}\right).$$

Komplexe Differenzierbarkeit.

Damit bekommen wir weiterhin die Darstellung

$$df = A\,dz + B\,\overline{dz},$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$$

und es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - df}{dz} = 0.$$

Definition: *Die Funktion* f *heißt* komplex differenzierbar *in* z_0*, falls*

$$df = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0))\,dz$$

d.h. falls $B = 0$*.* □

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt (mit $B = 0$)

$$f_x(z_0) + if_y(z_0) = 0$$

somit

$$u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i[u_y(z_0) + iv_y(z_0)] = 0$$

bzw.

$$u_x(z_0) - v_y(z_0) + i[u_y(z_0) + v_x(z_0)] = 0.$$

Trennt man nach Real- und Imaginärteil, so bekommt man die
Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

Fazit: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. □

Punktweise Differenzierbarkeit.

Beobachtung: Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$df = A\,dz \qquad \text{mit } A = (f_x(z_0) - i f_y(z_0))/2$$

und daher gilt für den *komplexen Zuwachs* $dz = \ell$

$$f(z_0 + \ell) - f(z_0) = A\ell + \Phi(\ell)$$

mit

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{\Phi(\ell)}{\ell} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = A.$$

Definition: *Der Grenzwert*

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell}$$

heißt die Ableitung *von* f *in* z_0*, kurz*

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad Df(z_0)$$

□

Komplexe Differenzierbarkeit und Ableitungen.

Bemerkungen:

- Wir bilden Ableitungen einer komplexen Funktion wie im Reellen, nämlich unter Verwendung von Differenzenquotienten.
- Im Reellen lässt sich die Ableitung geometrisch als Tangentensteigung interpretieren. Wie verhält sich dies im Komplexen? (Antwort später!)
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt: Aus der Existenz einer Ableitung folgt die Differenzierbarkeit.

Denn: Aus der Existenz der Ableitung in $z_0 = x_0 + iy_0$ folgt insbesondere

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0)$$

und somit ($B = 0$)

$$f_x(z_0) = -if_y(z_0)$$

Zusammenfassung der bisherigen Diskussion.

Satz: *Sei* $f = u + iv$ *eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich* $D(f)$. *Weiterhin sei* $z_0 \in D(f)$, *so dass* u, v *in einer Umgebung von* z_0 *stetig partiell nach* x, y *differenzierbar sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f *ist komplex differenzierbar in* z_0;

(b) u *und* v *genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;*

(c) Die Ableitung von f *existiert in* z_0.

□

Bemerkung: Weiterhin folgt (aus der bisherigen Diskussion) die Beziehung

$$df = f'(z_0)dz$$

falls f in z_0 komplex differenzierbar. Schließlich gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = z^2$ gilt

$$f(x,y) = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$f_x(x,y) = 2x + 2iy \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -2y + 2ix = if_x(x,y)$$

Für jedes $z = z_0$ gilt $B = 0$ und $A = 2z_0$, d.h.

$$df = 2z_0\,dz.$$

Somit ist $f(z)$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z_0) = 2z_0 \qquad \text{für } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Etwas direkter:

$$\frac{f(z_0+\ell) - f(z_0)}{\ell} = \frac{(z_0+\ell)^2 - z_0^2}{\ell} = \frac{2z_0\ell + \ell^2}{\ell} = 2z_0 + \ell \longrightarrow 2z_0 \text{ für } \ell \to 0.$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = \bar{z}$ gilt

$$f(x,y) = f(z) = \bar{z} = x - iy$$

und somit

$$f_x(x,y) = 1 \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -i.$$

Für jedes $z = z_0$ gilt

$$A = \frac{1}{2}(f_x(x,y) - if_y(x,y)) = 0 \text{ und } B = \frac{1}{2}(f_x(x,y) + if_y(x,y)) = \frac{1-i^2}{2} = 1,$$

also $A \equiv 0$, $B \neq 0$ und $df = \overline{dz}$.

Fazit: Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist in keinem Punkt der komplexen Ebene komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nirgends erfüllt, und die Ableitung von f existiert in keinem Punkt. □

Beispiel.

Für $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ gilt

$$f(x,y) = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad f_x(x,y) = 2x \quad f_y(x,y) = 2y$$

und somit für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) = \overline{z_0}$$

und

$$B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)) = z_0$$

und somit

$$df = \overline{z_0}\,dz + z_0\,d\bar{z}.$$

Fazit: Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nur im Nullpunkt $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nur im Nullpunkt erfüllt, und die Ableitung von f existiert nur im Nullpunkt mit $f'(0) = 0$. □

Beispiel.

Für $f(z) = \exp(z)$ gilt mit $f = u + iv$ die Zerlegung

$$f(x,y) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

somit

$$u(x,y) = e^x\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = e^x\sin(y)$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= e^x\cos(y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -e^x\sin(y) = -v_x(x,y). \end{aligned}$$

Somit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in jedem Punkt der komplexen Ebene erfüllt, d.h. die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist überall komplex differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z = f(z).$$

□

4.2 Analytische Funktionen

Nun: Lassen als Definitionsbereiche nur Gebiete zu.

Definition: *Ein* `Gebiet` *ist eine zusammenhängende offene Punktmenge der komplexen Ebene.* □

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \mathrm{i}$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 3 < |z| < 7\}$.

Aber:
Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen. □

Analytische (Holomorphe) Funktionen.

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$, $z \in D(f)$, *heißt* analytisch *(bzw.* holomorph*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in D(f)$ *komplex differenzierbar.*

□

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Bemerkung: Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig. □

Differentiationsregeln für analytische Funktionen.

Satz: *Die Funktionen* f *und* g *seien analytisch in einem Gebiet* G*. Dann sind die Funktionen* $f+g$ *und* fg *ebenfalls analytisch in* G*. Gilt* $g(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G$*, so ist weiterhin* f/g *analytisch in* G*. Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f'+g' \\ (fg)' &= f'g+fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-fg'}{g^2}\end{aligned}$$

□

Ganze Funktionen.

Definition: *Eine Funktion, die in der komplexen Ebene analytisch ist, heißt* ganze Funktion □

Bemerkung: Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

Denn: Konstanten $f_c(z) \equiv c \in \mathbb{C}$ sind ganz mit $f_c'(z) \equiv 0$. Weiterhin ist die Identität $g(z) = z$ ganz mit $g'(z) = 1$. Da sich jedes Polynom $p(z)$ als Komposition von Funktionen f_c und g schreiben lässt, ist $p(z)$ ganz mit

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

□

Bemerkung: Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \exp(z)$ ist ganz. □

Zusammensetzung analytischer Funktionen.

Betrachte analytische Funktionen

$$g : D(g) \longrightarrow W(g) \qquad \text{und} \qquad f : D(f) \longrightarrow W(f)$$

mit $W(g) \subset D(f)$.

Satz: *Die Komposition* $f \circ g$ *zweier analytischer Funktionen* f *und* g *mit* $W(g) \subset D(f)$ *ist analytisch, und es gilt die* Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

bzw.

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \qquad \textit{für alle } z_0 \in D(f \circ g) = D(g).$$

□

Umkehrung analytischer Funktionen.

Betrachte bijektive analytische Funktion

$$f : D(f) \longrightarrow W(f)$$

mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W(f) \longrightarrow D(f).$$

Satz: *Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven analytischen Funktion f ist analytisch, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

bzw.

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1})(w_0)} \qquad \text{für alle } w_0 \in D(f^{-1}) = W(f).$$

□

Beispiele.

Beispiel 1: Betrachte $f(z) = z^2$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ ist der Hauptwert der Wurzelfunktion, und es gilt

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 2: Betrachte $f(z) = \exp(z)$ auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \mathrm{Log}(z)$ ist der Hauptwert des Logarithmus, und es gilt

$$(\mathrm{Log}z)' = \frac{1}{e^{\mathrm{Log}(z)}} = \frac{1}{z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 3: Für $f(z) = z^a$, den Hauptwert von $\{z^a\}$, $z \in \mathbb{C}^-$ und $a \in \mathbb{C}$ fest, gilt

$$(z^a)' = az^{a-1} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

□

4.3 Geometrie der komplexen Differenzierbarkeit

Sei $f : D(f) \longrightarrow W(f)$ eine analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$ ein Punkt. Weiterhin sei

$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \,|\, t \in [\alpha, \beta]\} \subset D(f)$$

eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Schließlich seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar. Dann ist $z(t)$ in t_0 differenzierbar mit Ableitung

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Im folgenden setzen wir $z'(t_0) \neq 0$ voraus.

Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f?

Betrachte dazu das Bild

$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) \,|\, t \in [\alpha, \beta]\}$$

mit $w(t_0) = f(z(t_0))$, kurz $w_0 = f(z_0)$.

Geometrische Interpretationen.

Beachte: Der Tangentenvektor $w'(t_0)$ von Γ^* in w_0 berechnet sich nach der Kettenregel zu

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt dann

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

bzw.

$$\alpha^* = \alpha + \omega$$

für $\alpha^* = \arg(w'(t_0))$, $\alpha = \arg(z'(t_0))$ und $\omega = \arg(f'(z_0))$.

Geometrische Interpretationen:

- Man erhält den Tangentenvektor von Γ^* durch Drehung von Γ um Winkel ω;
- Der Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab, aber nicht von Γ;
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch die Abbildung f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht. □

Winkeltreue (Konforme) Abbildungen.

Definition: *Eine Abbildung* $f : D(f) \longrightarrow W(f)$, *unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man* `winkeltreu` *bzw.* `konform`. □

Satz: *Eine analytische Funktion* $f : D(f) \longrightarrow W(f)$ *ist in jedem Punkt* $z_0 \in D(f)$ *mit* $f'(z_0) \neq 0$ *konform.* □

Weiterhin gilt die folgende Umkehrung des Satzes.

Satz: *Sei* $f : D(f) \longrightarrow W(f)$ *in* $z_0 \in D(f)$ *konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil* $u(z)$ *und* $v(z)$ *von* $f = u + iv$ *in einer Umgebung von* z_0 *stetig differenzierbar. Dann ist* f *komplex differenzierbar mit* $f'(z_0) \neq 0$. □

5 Ebene Potentialprobleme

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mit *konformen* Abbildungen f.

Methode: Konstruktion von *konformen* Transformationen.

5.1 Konforme Transformation von Potentialen

Ausgangssituation:

- Sei $f : G \longrightarrow G'$ analytisch, bijektiv, und *konform*, für Gebiete $G, G' \subset \mathbb{C}$.
- Somit gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \longrightarrow G$ mit

$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für } w = f(z) \qquad \text{wobei } z = x + iy \in G, w = u + iv \in G'.$$

- Weiterhin sei in G eine *reellwertige* zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\Phi : (x, y) \longrightarrow \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R} \qquad \text{für } z \in G$$

definiert.

Konforme Transformationen.

Dann gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \longrightarrow \mathbb{R}$$

bzw.

$$\Psi : (u, v) \longrightarrow \Psi(u, v) = \Psi(w) := \Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R} \qquad \text{für } w \in G'$$

Definition: *Die obige Konstruktion von Ψ nennt man* konforme Transformation *von Φ mit der Abbildung f.* □

Physikalische Anwendungen: Im folgenden sind Φ und Ψ Potentiale, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.

Dabei sind die Vektoren (Φ_x, Φ_y) und (Ψ_u, Ψ_v) von besonderem Interesse.

Komplexe Gradienten.

Definition: *Unter dem* komplexen Gradienten $\operatorname{grad}(\Phi)$ *von* Φ *verstehen wir die Funktion*

$$\operatorname{grad}((\Phi)(x,y)) = \Phi_x(x,y) + i\Phi_y(x,y)$$

□

Bemerkungen:

- Der komplexe Gradient fasst den *üblichen* Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient $\operatorname{grad}(\Psi)$ von Ψ gegeben durch

$$\operatorname{grad}((\Psi)(u,v)) = \Psi_u(u,v) + i\Psi_v(u,v).$$

Frage:

Wie verhalten sich komplexe Gradienten bei konformen Transformationen?

Transformationen von komplexen Gradienten.

Ausgangspunkt: Sei $\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y), v(x,y))$ mit

$$u(x,y) = u(z) \qquad v(x,y) = v(z) \qquad u(z) + iv(z) = f(z).$$

Dann gilt (nach Kettenregel)

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Psi_u(u(x,y),v(x,y))u_x(x,y) + \Psi_v(u(x,y),v(x,y))v_x(x,y) \\ \Phi_y &= \Psi_u(u(x,y),v(x,y))u_y(x,y) + \Psi_v(u(x,y),v(x,y))v_y(x,y) \end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{grad}(\Phi) = \Phi_x + i\Phi_y = \Psi_u(u_x + iu_y) + \Psi_v(v_x + iv_y),$$

bzw. mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gilt

$$\operatorname{grad}(\Phi) = (\Psi_u + i\Psi_v)(u_x - iv_x) = \operatorname{grad}(\Psi) \cdot (u_x - iv_x).$$

Erinnerung: Es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \qquad \text{und} \qquad \overline{f'(z)} = u_x(z) - iv_x(z).$$

Erster Transformationssatz.

Satz: *Geht Ψ durch Transformation mit der analytischen Abbildung f aus Φ hervor, so gilt*

$$\operatorname{grad}(\Phi)(z) = \operatorname{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)}$$

wobei $w = f(z)$. ■

Bemerkung: Bei vielen Potentialproblemen ist die Größe

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}$$

bekannt.

Frage: Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator Δ? D.h. welcher Werte ergibt sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv} \quad ?$$

Anwendung des Laplace-Operators.

Mit erneuter Anwendung der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} &= \Psi_{uu}(u_x)^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}(v_x)^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}\\ \Phi_{yy} &= \Psi_{uu}(u_y)^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}(v_y)^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt durch Addition

$$\begin{aligned}\Delta_z\Phi &= \Psi_{uu}\left[(u_x)^2 + (u_y)^2\right] + 2\Psi_{uv}\left[u_xv_x + u_yv_y\right]\\ &\quad + \Psi_{vv}\left[(v_x)^2 + (v_y)^2\right] + \Psi_u\Delta_z u + \Psi_v\Delta_z v.\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, liefern

$$\Delta_z\Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u\Delta_z u + \Psi_v\Delta_z v$$

wobei $|f'(z)|^2 = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2$ verwendet wurde.

Zweiter Transformationssatz.

Satz: *Geht Ψ aus Φ durch konforme Transformation mit der Abbildung f hervor, so gilt*

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi \cdot |f'(z)|^2$$

wobei $w = f(z)$.

Beweis: Es gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v,$$

und weiterhin folgt

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad \text{und} \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, somit

$$\Delta_z u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

und analog gilt $\Delta_z v = 0$. Insgesamt bekommt man somit die Behauptung. ■

Harmonische Funktionen.

Folgerung: *Genügt* Φ *der Laplace-Gleichung* $\Delta\Phi = 0$, *so folgt* $\Delta\Psi = 0$.

Beweis: Mit der Konformität von f folgt $f'(z) \neq 0$. Daraus bekommt man die Behauptung direkt mit der Identität $\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi \cdot |f'(z)|^2$. ■

Definition: *Eine Funktion* f, *die in einem Gebiet* G *der Laplace-Gleichung* $\Delta f = 0$ *genügt, nennt man* harmonisch *in* G. □

Somit können wir die obige Folgerung entsprechend umformulieren.

Folgerung: *Bei konformer Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.* □

Wie bereits mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gezeigt, gilt

Satz: *Falls* $f = u + iv$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, *analytisch auf einem Gebiet* G, *so gilt*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } G \qquad \text{und} \qquad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G$$

d.h. Real- und Imaginärteil von f *sind jeweils harmonisch auf* G.

Beweis: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$. Analog $\Delta v = 0$. ■

Existenz der konjugiert harmonischen Funktion.

Es gilt die folgende Umkehrung des vorigen Satzes.

Satz: *Ist* $u \equiv u(x,y)$ *auf einem Gebiet* G *harmonisch,* $\Delta u = 0$ *in* G, *so gibt es eine Funktion* $v \equiv v(x,y)$, *so dass die Abbildung* $f = u + iv$ *auf* G *analytisch ist.*

Beweis: Sei $u \equiv u(x,y)$ mit $\Delta u = 0$ in G. Somit suchen wir $v \equiv v(x,y)$ mit

$$v_x = -u_y \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x,$$

so dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, woraus folgen würde

$$\operatorname{grad}(v) = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) = V = (V_1, V_2)$$

Somit suchen wir ein Potential v mit $\operatorname{grad}(v) = V$. Mit der Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert (vgl. Analysis III). ■

Skizze zur Lösung ebener Potentialprobleme.

Hilfsmittel: Transformationssätze.

Vorgehensweise: Konforme Transformation.

- **Gegeben:**

Potentialproblem in der z-Ebene, der *physikalischen Ebene*.

- **Transformation:**

Transformiere das Problem konform in die w-Ebene, die *Modellebene*.

- **Vereinfachung:**

Löse das Problem (*leicht*?) in der Modellebene.

- **Lösung:**

Rücktransformation in z-Ebene liefert Lösung in der physikalischen Ebene. □

Temperaturverteilung in homogenem Zylinder.

Gegeben:

ein homogener Zylinder senkrecht zur z-Ebene mit beliebigem Querschnitt Q.

- Die Oberflächentemperatur des Zylinders sei *zeitunabhängig*.
- Die Oberflächentemperatur sei *konstant* bei konstantem z.

Frage: Wie sieht die Temperaturverteilung im Inneren des Zylinders aus?

- dabei werde am Rand die Temperatur $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$, gemessen.

Modellierung: Die Temperatur Φ genügt nach der Wärmeleitungsgleichung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{in G.}$$

Zusätzlich gelten die Dirichlet-Randbedingungen

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \qquad \text{für alle } z \in \Gamma.$$

Mathematische Aufgabenstellung: Löse das obige Dirichlet-Problem.

Annahme: Das Problem gut gestellt, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung. □

Vereinfachung des Dirichlet-Problems.

- **Ziel:** Bilde das Gebiet G eineindeutig und konform auf den Einheitskreis ab.
- **Bemerkung:** Unter geeigneten Bedingungen ist dies mit einer analytischen Funktion f möglich, so dass

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für } |w| \leq 1$$

  die *transformierte* Temperatur liefert.

- Im Inneren des Einheitskreises erfüllt Ψ somit die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0 \qquad \text{für } |w| < 1.$$

- Weiterhin nimmt Ψ auf dem Kreisrand die transformierten Randwerte an:

$$\Psi(e^{i\theta}) = \Psi_0(e^{i\theta}) = \Phi_0(f^{-1}(e^{i\theta})) \qquad \text{für } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- **Einfachere Aufgabe:** Löse das Dirichlet-Problem für Ψ auf dem Einheitskreis.

Lösung des einfacheren Dirichlet-Problems.

- **Voraussetzung:** Sei Ψ_0 hinreichend *glatt*, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

- Dann kann die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angegeben werden mit

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \qquad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \le \rho \le 1.$$

- **Rücktransformation:** Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \qquad \text{mit } \phi = \arg(f(z)). \qquad \square$$

5.2 Ebene stationäre Strömungen von Flüssigkeiten

Betrachten:

- zeitunabhängige ebene Strömungen von
- *idealen* (d.h. reibungsfeien) und *inkompressiblen* Flüssigkeiten;
- die Strömungen seien *quellenfrei* und *wirbelfrei*;
- dabei bezeichne

$$q(x,y) = (q_1(x,y), q_2(x,y))$$

  den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x,y).

- `Quellenfreiheit` bedeutet

$$\operatorname{div}(q) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

- `Wirbelfreiheit` bedeutet

$$\operatorname{rot}(q) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

Zur Existenz von Potentialströmungen.

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\mathrm{rot}(q) = 0$ ist das Differential

$$q_1(x,y)dx + q_2(x,y)dy$$

integrabel, d.h. es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$q = \mathrm{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Definition: *Die Funktion* Φ *mit* $q = \mathrm{grad}(\Phi)$ *heißt* Potentialströmung *bzw. das* Geschwindigkeitspotential *der Strömung.* □

Erinnerung: *Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn* $\mathrm{rot}(q) = 0$ *folgt unmittelbar aus* $q = \mathrm{grad}(\Phi)$. □

Zur Quellenfreiheit von wirbelfreien Potentialen.

Beobachtung: Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von q)

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\operatorname{div}(q) = 0$, die Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Zusammenfassung: Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta \Phi = 0.$$

Umkehrung: Jede harmonische Funktion Φ, $\Delta \Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren. □

Neumannsches Randwertproblem.

Voraussetzungen:

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets G (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ, d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor grad(Φ) ist der Tangentenvektor von Γ;
- dann verschwindet die Normalenableitung von Φ längs Γ.
- Dies führt insgesamt zu dem Neumannschen Randwertproblem

$$\Delta(\Phi) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

  das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

- Im folgenden entwickeln wir diesen Lösungsweg.

Lösung des Neumannschen Randwertproblems.

- Bilde G bijektiv und konform mit $f : G \longrightarrow G^*$ auf *einfacheres* Gebiet G^* ab;
- Transformiere das Potential Φ von G nach G^*, womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für alle } w \in G^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Psi = 0$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von G konform ist, so gilt

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n^*} = 0$$

für die Normalenableitung des Randes Γ^* von G^*.

- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta\Psi = 0 \text{ in } G^* \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in G bekommt man durch Rücktransformation. □

Strömung durch einen Kanal variabler Breite.

- **Physikalische Ebene:** ein Kanal G variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal G^*;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$$

  wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist,
  der die Geschwindigkeit liefert.

- **Aufgabe:**
  Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.
- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation. □

Umströmung eines Hindernisses.

Voraussetzungen für die physikalische Ebene:

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränktem Querschnitt;

Frage:

- Wie sieht das Strömungsbild der gestörten Strömung aus?

Beachte:

- die Strömung bleibt im Unendlichen ungestört und somit gilt

$$\text{grad}(\Phi(z)) \longrightarrow V \qquad \text{für } z \to \infty$$

für den Geschwindigkeitsvektor, kurz $\text{grad}(\Phi(\infty)) = V$.

Umströmung eines Hindernisses.

Vereinfachte Modellebene:

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- in diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$.
- **Problem:** Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit analytischer Funktion f, wobei

$$f(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad f'(\infty) = 1.$$

- Dann gilt mit dem ersten Transformationssatz

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(\Phi(z)) &= \mathrm{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \mathrm{grad}(\Phi(\infty)) &= \mathrm{grad}(\Psi(\infty)) \qquad \text{für } z \to \infty \end{aligned}$$

so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen. □

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten Joukowski-Funktion

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = V\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Mit $\operatorname{grad}(\Psi(w)) \equiv V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \operatorname{grad}(\Phi(z)) = \operatorname{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right)$$

für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V\left(1 - \frac{1}{r^2}e^{2i\phi}\right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (Staupunkte);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$. □

6 Komplexe Integration

Ziel: Berechne für komplexe Funktion $f : D \longrightarrow W \subset \mathbb{C}$ Integral der Form

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = ?$$

wobei $\Gamma \subset D \subset \mathbb{C}$ ein Weg im Definitionsbereich von f.

Fragen:

- Wie ist ein solches `komplexes Integral` sinnvollerweise zu definieren?
- Wie sind komplexe Integrale der obigen Form *einfach* zu berechnen?
- Für welche Funktionen f kann man das Integral *einfach* bestimmen?
- Wie hängt der Wert des komplexen Integrals vom Weg Γ ab?
- Kann man eine komplexe Funktion mittels komplexer Integration darstellen?

6.1 Definition und Berechnung komplexer Integrale

Ausgangspunkt:

- Sei $f : D \longrightarrow W$ eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$;
- Sei $\Gamma \subset D$ eine beschränkte orientierte Kurve mit Parametrisierung

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) \in D \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

wobei $z(\alpha)$ Anfangspunkt und $z(\beta)$ Endpunkt der Kurve Γ.

- Nun zerlegen wir Γ in n Teilkurven, jeweils durch Anfangs- und Endpunkte

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), z_2 = z(t_2), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n),$$

definiert, wobei $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

- Mit $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $0 \leq k \leq n-1$, bilden wir die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad \text{für } \zeta_k \in \Gamma\big|_{[z_k, z_{k+1}]}$$

Definition komplexer Kurvenintegrale.

- Nun verfeinern wir die Zerlegung, so dass $\max_{0\le k<n} |\Delta z_k| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.
- Betrachte die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} S_n = ?$

Definition: *Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit*

$$\max_{0\le k<n} |\Delta z_k| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma\big|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ der Partialsummen S_n jeweils existiert und stets denselben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\,dz$$

als das Integral der Funktion f längs der Kurve Γ *bezeichnet.*
In diesem Fall spricht man von einem komplexen Kurvenintegral, f *heißt* Integrand *und* Γ *heißt* Integrationsweg. □

Bemerkungen zu komplexen Kurvenintegralen.

- Ist f reellwertig auf der reellen Achse und ist $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall der reellen Achse, so stimmt das komplexe Kurvenintegral mit dem entsprechenden Riemannschen Integral überein:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

- Das komplexe Kurvenintegral exisitiert unter den folgenden Bedingungen.

(a) f ist stückweise stetig längs Γ;

(b) Γ besitzt eine Parametrisierung $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, die stückweise stetig differenzierbar ist, so dass $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

Geometrische Interpretation von (b):
Die Tangente der Kurve Γ variiert stetig längs Γ bis auf endlich viele Knickstellen, d.h. Γ ist stückweise glatt.

- Im folgenden setzen wir die Bedingungen (a) und (b) stets voraus.

Beispiel. Wir berechnen das Integral $\int_\Gamma z\,dz$, wobei

- Γ der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.
- Verwenden mit $q = e^{2\pi i/n}$ die $n+1$ Punkte

$$z_k = q^k \qquad 0 \le k \le n$$

zur Zerlegung von Γ sowie die Zwischenpunkte $\zeta_k = z_k$.

- Für die n-te Partialsumme bekommen wir

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1}-z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k(q^{k+1}-q^k) \\ &= (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} = (q-1)\sum_{k=0}^{n-1}(q^2)^k \end{aligned}$$

und somit

$$S_n = (q-1)\frac{q^{2n}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2n}-1}{q+1}$$

Wegen $q^{2n} = e^{4\pi i} = 1$ folgt $S_n = 0$ für alle n und somit $\int_\Gamma z\,dz = 0$. □

Noch ein Beispiel. Wir berechnen nun das Integral $\int_\Gamma \overline{z}\,dz$, wobei

- Γ erneut der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.
- Mit der gleichen Zerlegung und den gleichen Zwischenpunkten bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{q}^k (q^{k+1} - q^k)$$

für die Partialsummen. Mit $\overline{q} = e^{-2\pi i/n} = 1/q$ folgt somit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q-1) = n(q-1) = n(e^{2\pi i/n} - 1).$$

Mit der Substitution $\ell = 2\pi i/n$ berechnen wir nun den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n(e^{2\pi i/n} - 1) = \lim_{\ell\to 0} \frac{2\pi i}{\ell}(e^\ell - 1) = 2\pi i \lim_{\ell\to 0} \frac{e^\ell - 1}{\ell} = 2\pi i.$$

Somit gilt

$$\int_\Gamma \overline{z}\,dz = 2\pi i.$$

Ein weiteres Beispiel.

Wir berechnen nun das Integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

wobei Γ wieder der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.

Beachte, dass für jeden Punkt z auf dem Einheitskreisrand gilt

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1.$$

Somit bekommen wir unter Verwendung des vorigen Beispiels

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

□

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Ziel: Reduziere Berechnung eines komplexen Integrals auf zwei reelle Integrale.

Start: Sei $f : D \longrightarrow W$ eine stetige komplexe Funktion. Der Integrationsweg Γ besitze Parametrisierung

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

Weiterhin: Zerlegung des Parameterintervalls $[\alpha, \beta]$ mit Parametern

$$t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

liefert entsprechende Zerlegung von Γ mit Teilpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n).$$

Setze

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \qquad \text{und} \qquad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta z_k = z_{k+1} - z_k &= z(t_{k+1}) - z(t_k)\\ &= [x(t_{k+1}) - x(t_k)] + i[y(t_{k+1}) - y(t_k)]\\ &= [x'(t_k) + iy'(t_k)]\Delta t_k + \Phi_k\\ &= z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k\end{aligned}$$

mit $\lim_{k\to\infty} \frac{\Phi_k}{\Delta t_k} = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Mit den Zwischenpunkten $\zeta_k = z(t_k) = z_k$ bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k))[z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k]$$

für die n-ten Partialsummen mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Rezept zur Berechnung eines komplexen Integrals.

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

□

Beispiel.

Wir berechnen nun erneut das Integral

$$\int_\Gamma z\,dz$$

über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ.

- Wähle als Parametrisierung

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) = e^{it} \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

- Dann gilt $dz = z'(t)dt = ie^{it}dt$ und somit

$$\int_\Gamma z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = \frac{1}{2}e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4\pi i} - e^0\right) = 0$$

□

Weitere Beispiele.

Wir berechnen nun erneut die Integrale

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz$$

jeweils über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ.

Mit der gleichen Parametrisierung wie im vorigen Beispiel ergibt sich für das erste Integral

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i$$

und für das zweite Integral bekommt man entsprechend den Wert

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i.$$

□

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals.

- Additivität bezüglich des Integranden.
  Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt
  $$\int_\Gamma (f(z) + g(z))\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integranden.
  Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt
  $$\int_\Gamma cf(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz.$$
- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$
  $$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Weitere Eigenschaften des komplexen Integrals.

- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.
  Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \le L \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \le ML$$

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \le ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

6.2 Integrale analytischer Funktionen

Grundvoraussetzung:

- $f : D \longrightarrow W$ sei analytisch.

Weitere Voraussetzung:

- Das Definitionsgebiet D von f sei offen und einfach zusammenhängend.

Weitere Begriffe:

- Der Integrationsweg Γ heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt von Γ übereinstimmen.
- Γ heißt einfach geschlossen, falls die Kurve Γ keine Schnittpunkte besitzt, d.h. für alle Parameter t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, einer beliebigen Parametrisierung

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \quad \text{wobei } \alpha < \beta$$

von Γ gilt $z(t_1) \neq z(t_2)$, für alle $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$,
d.h. $z(t)$ ist injektiv auf (α, β). □

Der Cauchysche Integralsatz.

Satz (Cauchyscher Integralsatz)**:**

Sei f *analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G*. Dann gilt für jede geschlossene Kurve* $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0,$$

d.h. das Integral von f *längs jeder geschlossenen Kurve in* G *ist Null.*

Beweis: Sei $\Gamma \subset G$ geschlossen mit Parametrisierung

$$\Gamma : t \longmapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

Mit den üblichen Darstellungen

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{und} \qquad f(z) = u(z) + iv(z)$$

erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]dt \\ &\quad + i\int_\alpha^\beta [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)]dt\end{aligned}$$

bzw. es gilt die Darstellung

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\Gamma (v\,dx + u\,dy),$$

des komplexen Kurvenintegrals durch zwei reelle Kurvenintegrale.

Fortsetzung des Beweises.

Im folgenden zeigen wir, dass die reellen Kurvenintegrale jeweils verschwinden.

O.E. nehmen wir Γ dabei als einfach geschlossen und positiv orientiert an.

Mit dem Greenschen Satz (Analysis III) gilt für das ebene Vektorfeld $p = (u, -v)$

$$\int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) = \int_\Omega \operatorname{rot}(p)\,dx\,dy$$

wobei Ω das von Γ eingeschlossene Gebiet bezeichnet, d.h. $\partial\Omega = \Gamma$, und wobei

$$\operatorname{rot}(p) = \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -v_x - u_y.$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, insbesondere $u_y = -v_x$, verschwindet die Rotation von p, d.h. es gilt $\operatorname{rot}(p) = 0$, und somit

$$\int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) = \int_\Omega \operatorname{rot}(p)\,dx\,dy = 0.$$

Analog zeigt man, dass $\int_\Gamma (v\,dx + u\,dy) = 0$; somit insgesamt $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$. ■

Beispiele. Γ umlaufe den Einheitskreisrand einmal im positiven Sinn.

Beispiel 1: $f(z) = z$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Somit ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar und es gilt

$$\int_\Gamma z \, dz = 0.$$

Beispiel 2: Für $f(z) = \bar{z}$ ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, denn f ist in keinem Gebiet analytisch. Es gilt

$$\int_\Gamma \bar{z} \, dz = 2\pi i.$$

Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allerdings ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend und somit ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

□

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Voraussetzungen:

- f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G;
- $\Gamma, \Gamma_1 \subset G$ zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1;

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz: Es gilt

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$$

wegen

$$\int_{\Gamma-\Gamma_1} f(z)\,dz = 0.$$

Fazit: Das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz =: \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges Γ ab.

Zur Konstruktion von Stammfunktionen.

Ausgangspunkt: Betrachte für festes $z_0 \in G$ und analytisches f die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{für } z \in G.$$

Behauptung: Die Funktion F_{z_0} ist analytisch und es gilt

$$F'_{z_0}(z) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Beweis: Für den Differenzenquotient von F_{z_0} bei z gilt

$$\begin{aligned} d(\ell) &= \frac{F_{z_0}(z+\ell) - F_{z_0}(z)}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\int_{z_0}^{z+\ell} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{\ell}\int_{z}^{z+\ell} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z+\ell t)\,dt \end{aligned}$$

und somit

$$f(z) = \lim_{\ell \to 0} d(\ell) = F'_{z_0}(z).$$

■

Hauptsatz der komplexen Integralrechnung.

Satz (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)**:**
Sei f *analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *und sei* $z_0 \in G$.
Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{für } z \in G$$

analytisch und es gilt $F'_{z_0} = f$ *auf* G. ■

Definition: *Sei* F *eine analytische Funktion auf einem Gebiet* G *mit* $F' = f$.
Dann heißt F Stammfunktion *von* f *auf* G. □

Fazit: Die obige Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{für } z \in G$$

ist eine Stammfunktion von f auf G. □

Berechnung des Integrals.

Betrachte für $z_0, z_1 \in G$ das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

wobei f analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G.

Weiterhin sei F eine beliebige Stammfunktion von f auf G.

Dann gilt $F' = F'_{z_0}$ und somit

$$F_{z_0}(z) = F(z) + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Wegen $F_{z_0}(z_0) = 0$ gilt $c = -F(z_0)$ und somit

$$F_{z_0}(z) = F(z) - F(z_0).$$

Daraus folgt schließlich

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F_{z_0}(z_1) = F(z_1) - F(z_0).$$

Beispiel: Wir bestimmen für $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\,dz$$

- unter Verwendung der Stammfunktion $f(z) = -1/z$;
- durch Integration längs der Stecke $z(t) = a + it$, $-b \le t \le b$;
- durch Integration längs des Kreisbogens $z(t) = \sqrt{a^2+b^2}e^{it}$, $-\phi \le t \le \phi$.

Methode 1: Es gilt

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}\Big|_{a-ib}^{a+ib} = -\frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{2ib}{a^2+b^2}.$$

Methode 2: Es gilt

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\,dz = i\int_{-b}^{b} \frac{1}{(a+it)^2}\,dt = -\frac{1}{a+it}\Big|_{-b}^{b} = \frac{2ib}{a^2+b^2}.$$

Methode 3: Übung mit $\sin(\phi) = b/\sqrt{a^2+b^2}$. □

6.3 Die Cauchysche Integralformel

Frage: Was ist mit Integralen für Gebiete G, die *nicht* einfach zusammenhängend sind, speziell Gebiete mit "Löchern"?

Beachte: Hier ist der Cauchysche Integralsatz *nicht* anwendbar!

Beispiel: Für den positiv orientierten Einheitskreisrand Γ gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Hierbei ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beachte: Falls das von Γ umschlossene Gebiet jedoch komplett in G liegt, so ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar, und es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0.$$

Zweifach zusammenhängende Gebiete.

Ausgangssituation:

- Sei G ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, d.h. G besitzt genau ein "Loch" L.
- Weiterhin seien Γ_1 und Γ_2 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die das Loch L einmal umlaufen.

Konstruktion:

- Verbinde nun Γ_1 und Γ_2 durch zwei weitere geschlossene Kurvenstücke Γ' und Γ'', die in G liegen (siehe Skizze).

Cauchyscher Integralsatz: Für eine analytische Funktion f auf G gilt

$$\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{\Gamma''} f(z)\,dz = 0$$

und weiterhin

$$\int_{\Gamma'} f + \int_{\Gamma''} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{-\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = 0.$$

Verallgemeinerung Cauchyscher Intergralsatz.

Aus den vorigen Überlegungen folgt direkt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

und somit gilt der folgende

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Intergralsatzes):
Sei f *analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet* G *mit Loch* L*. Dann besitzt das Integral*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G*, die das Loch* L *einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert.* □

Beispiel: Für jeden geschlossenen Weg Γ, der den Ursprung einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Zurück zu einfach zusammenhängenden Gebieten.

Voraussetzungen:

- Sei G nun wieder ein *einfach* zusammenhängendes Gebiet.
- Γ sei eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- $a \in G$ sei ein Punkt, der von Γ umlaufen wird (siehe Skizze).
- f sei eine analytische Funktion auf G.

Beobachtung: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

ist analytisch in dem *zweifach* zusammenhängenden Gebiet $G' = G \setminus \{a\}$.

Somit gilt mit der Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

wobei $\Gamma_r \subset G'$ der positiv durchlaufene Rand des Kreises um a mit Radius r.

Zur weiteren Konstruktion.

Mit der Parametrisierung

$$\Gamma_r : t \longmapsto z(t) = a + re^{it} \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

und mit $dz = ire^{it}dt$ bekommen wir die Darstellung

$$\int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} re^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$$

bzw.

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$$

Mit $r \to 0$ folgt daraus

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

□

Die Cauchysche Integralformel.

Satz: *Sei* f *eine analytische Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet* G*. Weiterhin sei* Γ *eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in* G*. Dann gilt für jeden Punkt* $a \in G$*, der von* Γ *umlaufen wird, die* Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

□

Interpretation:

Die Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ sind für alle Argumente $z \in G$, die von $\Gamma \subset G$ umlaufen werden, vollständig durch die Werte von f auf Γ bestimmt.

Konsequenz 1:

Falls f im Inneren des von Γ umlaufenen Gebietes abgeändert wird, aber nicht auf Γ geändert wird, so ist die daraus resultierende Funktion $\tilde{f}$ nicht analytisch.

Konsequenz 2: Stimmen zwei analytische Funktionen f und g auf Γ überein, so stimmen f und g auf dem von Γ umschlossenen Gebiet überein, d.h. $f \equiv g$.

6.4 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Satz (Mittelwerteigenschaft): *Der Wert einer analytischen Funktion* f *im Mittelpunkt einer in ihrem Definitionsbereich enthaltenen Kreisscheibe stimmt mit dem Mittelwert von* f *auf dem Kreisrand überein.*

Beweis: Sei f analytisch auf G, $a \in G$, und sei Γ ein in G enthaltener positiv orientierter Kreisrand um a mit Radius r, der a einmal umläuft. Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

bzw. (wie bereits mit der Parametrisierung $z(t) = a + re^{it}$ hergeleitet)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Die rechte Seite beschreibt den Mittelwert von f auf Γ. ■

Maximumprinzip.

Satz (Maximumprinzip): *Sei* f *eine analytische Funktion auf einem Gebiet* G. *Falls es einen Punkt* $z_0 \in G$ *gibt mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in G,$$

so ist f *auf* G *konstant.*

Beweisskizze: Sei $z_0 \in G$ maximal mit $M := |f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$. Dann gilt mit der Mittelwerteigenschaft die Darstellung

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)\, dt \right|$$

und somit

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, dt = M$$

Fortsetzung der Beweisskizze.

Daraus folgt

$$\left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| = M \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dies bedeutet, dass $|f|$ auf jedem Kreis um z_0, der in G liegt, konstant ist.

Da man das gesamte Gebiet G mit Kreisscheiben überdecken kann (Übung), gilt

$$|f| \equiv M$$

auf ganz G.

Unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$f \equiv M$$

auf ganz G (Übung). □

Folgerungen aus dem Maximumprinzip.

Satz: *Sei* f *eine analytische Funktion auf einem beschränkten Gebiet* G*. Sei weiterhin* f *stetig auf* $\overline{G}$ *und nicht konstant. Dann nimmt die Funktion* $|f(z)|$ *ihren maximalen Wert nur auf dem Rand von* G *an.*

Beweis: Angenommen, $|f|$ nimmt ihr Maximum im Inneren von G an. Dann ist f nach dem Maximumprinzip konstant. Dies widerspricht der Annahme. ■

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**:** *Jedes Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *besitzt mindestens eine Nullstelle in der komplexen Ebene.*

Beweis: Für komplexe Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sei

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $n \geq 1$.

Angenommen, $p(z)$ besitzt keine komplexe Nullstelle, d.h. es gilt

$$p(z) \neq 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fortsetzung des Beweises.

Dann ist die reziproke Funktion

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

analytisch auf ganz $\mathbb{C}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} |f(z)| &= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0|} \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|a_n z^n|} \cdot \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|} = 0. \end{aligned}$$

Demnach besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Maximum.

Nach dem Maximumprinzip ist f konstant. Somit ist p konstant.

Dies widerspricht der Annahme an den Grad von p. ■

Integraldarstellung der Ableitung.

Voraussetzungen:

- Sei f analytisch in G;
- Γ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- das Innere G_Γ des von Γ umschlossenen Gebietes gehöre ganz zu G, $G_\Gamma \subset G$.

Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Differentiation: Nun gilt

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

und somit

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Integraldarstellung höherer Ableitungen.

Verallgemeinerung: Erneutes (wiederholtes) Differenzieren des Integranden,

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

liefert die Darstellung

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Cauchysche Integralformel für die Ableitungen.

Satz (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen): *Sei* f *in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von* f *in* G*, und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in* G*. Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve* $\Gamma \subset G$*, deren Inneres* G_Γ *ganz in* G *liegt, die Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ *von* f *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$. □

Bemerkungen:

- Für $n = 0$ liefert die obige Darstellung die Cauchysche Integralformel für f.
- Es gilt der Grundsatz: "einmal holomorph, immer holomorph" :

Eine analytische Funktion f lässt sich beliebig oft in ihrem Definitionsbereich G komplex differenzieren, d.h. ist f ist komplex differenzierbar in einem Gebiet G, so existieren alle Ableitungen $f^{(n)}$ von f in G für $n = 1, 2, 3, \ldots$. □

6.5 Die Taylor-Reihe

Start: Erinnerung an den Satz über die geometrische Reihe.

- Für die *endliche* geometrische Reihe gilt die Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \qquad \text{für } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

- Für $|q| < 1$ ist die *unendliche* geometrische Reihe konvergent mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1,$$

während die Reihe für $|q| \geq 1$ divergiert.

Zur Herleitung der Taylor-Reihe.

Vorbereitungen:

- Sei f analytisch im Gebiet G, $\Gamma \subset G$ einfach geschlossen und positiv orientiert.
- Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

  für jedes $z \in G$, das von Γ umlaufen wird.
- Sei nun $a \in G$ ein Punkt, der von Γ umlaufen wird.
- Weiterhin bezeichne r den Abstand zwischen a und Γ, d.h.

$$r = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$$

- Schließlich sei z ein Punkt im offenen Kreis $B_r(a) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a| < r\}$ um den Punkt a mit Radius r, d.h. $z \in B_r(a)$. Insbesondere gilt

$$|z - a| < r.$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Es gilt die Zerlegung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

- Wegen $|z - a| < r$ und $|\zeta - a| \geq r$ für $\zeta \in \Gamma$ gilt $|q| < 1$ für

$$q := \frac{z-a}{\zeta - a}.$$

- Daraus folgt die Darstellung

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma$$

und weiterhin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Durch Vertauschen von Summation und Integration bekommen wir somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

- Wegen

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta$$

gilt insgesamt die Taylor-Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

d.h. wir bekommen die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt a

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

□

Bemerkungen zur Taylor-Reihe.

- Mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

  konvergiert die Taylor-Reihe in $B_r(a)$ und stellt dort f dar.

- Die Taylor-Reihe hängt nur von f und a, aber nicht von Γ ab.
- Daher hängt der Konvergenzbereich der Taylor-Reihe nur von f und a ab.

Satz: *Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G und a sei ein Punkt in G. Dann konvergiert die Taylor-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen Inneres ganz in G enthalten ist, d.h. für alle $z \in B_r(a) \subset G$. □

Die Taylor-Reihe ist eindeutig.

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Gebiet* G *und* a *sei ein Punkt in* G*. In einer Umgebung von* a *gelte für* $f(z)$ *die Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$*, für* $n = 0, 1, 2, \ldots$*. Dann gilt*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von f *um* a*.*

Beweis: Für $z = a$ gilt $f(a) = c_0$. Durch Differentiation von f erhält man

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \text{ bzw. } f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

und somit $f'(a) = c_1$ bzw. $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für $z = a$, d.h. die Koeffizienten c_n stimmen mit den Koeffizienten der Taylor-Reihe überein. ■

Ein Beispiel.

Für die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\exp(z) = \exp(z) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und somit gilt

$$\left.\frac{d^n}{dz^n}\exp(z)\right|_{z=0} = 1 \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Daher besitzt die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ um $a = 0$ die Gestalt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

- Die Exponentialfunktion ist in der ganzen komplexen Zahlenebene analytisch.
- Somit gilt die obige Darstellung für die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ in ganz $\mathbb{C}$.

□

Noch zwei Beispiele.

- Für die Taylor-Reihe von $\exp(-z^2)$ um Null bekommen wir die Darstellung

$$\exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \dots$$

  in ganz $\mathbb{C}$.

- Die komplexe Sinusfunktion $\sin(z)$ besitzt die bekannte Reihen-Darstellung

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

- Der komplexe Sinus ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.
- Die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von $\sin(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

□

Und noch ein Beispiel.

- Wir entwickeln die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

um Null. Für $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots$$

- Dies ist bereits die Taylor-Reihe von $f(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert im Einheitskreis, d.h. für $|z| < 1$.
- **Begründung:** Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und der größte Kreis um Null, in dem f analytisch ist, ist der Einheitskreis. □

Die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel.

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Gebiet* G*. Die abgeschlossene Kreisscheibe* $|z-a| \leq r$, $r > 0$, *sei in* G *enthalten, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

die Taylor-Reihe von f *um* a*, also*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots.$$

Weiterhin sei

$$M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots.$$

Interpretation: Die Werte $f^{(n)}(a)$ können nicht beliebig schnell anwachsen.

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \right) 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

■

Der Satz von Liouville.

Satz (Satz von Liouville): *Ist eine komplexe Funktion* f *in der ganzen komplexen Ebene analytisch und beschränkt, so ist* f *konstant auf ganz* $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei f analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. es gibt ein M mit

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $a \in \mathbb{C}$ mit der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungsformel

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$$

für beliebiges $r > 0$. Für $r \to \infty$ folgt daraus

$$f'(a) = 0.$$

Da a beliebig war, gilt $f' \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h. f ist konstant auf ganz $\mathbb{C}$. ■

6.6 Die Laurent-Reihe

- **Voraussetzung:** Sei f analytisch in zweifach zusammenhängendem Gebiet G.
- **Ziel:** Stelle f in G durch geeignete Reihen-Entwicklung dar.
- **Vereinfachung:**

Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ sei f analytisch im Kreisring

$$R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\} = B_{r_2}(a) \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$$

wobei $B_r(a)$ der offene, $\overline{B_r(a)}$ der abgeschlossene Kreis um a mit Radius $r > 0$.

- Falls $r_1 = 0$, so gilt $R_0^{r_2}(a) = B_{r_2}(a) \setminus \{a\}$;
- Falls $r_2 = \infty$, so gilt $R_{r_1}^{\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$.

Beachte:

- f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ in R entwickelt werden.
- Denn ansonsten wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$.

Die Laurent-Reihenentwicklung.

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Kreisring* $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, *und es sei*

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

wobei $\Gamma \subset R$ *eine beliebige Kurve ist, die* $B_{r_1}(a)$ *einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für alle } z \in R.$$

Definition: *Die obige Reihe heißt* Laurent-Reihe *von* f *in* R.
Weiterhin heißt a *das* Entwicklungszentrum *der Laurent-Reihe.* □

Beachte: Die Laurent-Reihe enthält positive und negative Potenzen von $z - a$.

Bemerkungen zu Laurent-Reihenentwicklungen.

- Falls f in ganz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = 0 \qquad \text{für } n = -1, -2, -3, \ldots.$$

In diesem Fall enthält die Laurent-Reihe keine negativen Potenzen von $z-a$ und stimmt daher mit der Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für alle } z \in B_{r_2}(a).$$

überein. Insbesondere gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Die Werte der Laurent-Koeffizienten c_n sind unabhängig von Γ.

Ein Lemma.

Lemma: *Die Funktion* f *sei analytisch im Kreisring* $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$. *Weiterhin sei* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. *Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \text{für alle } \rho_1 < |z-a| < \rho_2,$$

wobei Γ_1 *der innere und* Γ_2 *der äußere Kreisrand von* $R_{\rho_1}^{\rho_2}$ *ist.*

Beweis: Sei $z \in R_{\rho_1}^{\rho_2}$. Dann gilt (siehe Skizze)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

Wegen $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \end{aligned}$$

■

Beweis vom Satz der Laurent-Reihenentwicklung.

Beweis: Sei $z \in R$. Für $\zeta \in \Gamma_2$ gilt $|\zeta - a| > |z - a|$ und somit

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1 \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma_2.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n c_n.
\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Andererseits gilt $|\zeta - a| < |z - a|$ für $\zeta \in \Gamma_1$ und somit

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1 \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma_1.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}}\, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n\, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} c_{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

■

Die Laurent-Reihe ist eindeutig.

Satz (Eindeutigkeitssatz):

Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in R.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \qquad \text{mit } d_n = c_n - c'_n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma \in R$ ein positiv orientierter Kreis um a.

Dann gilt (durch Multiplikation mit $(z-a)^{-m-1}$ und Integration längs Γ)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\, dz$$

Wegen

$$\int_\Gamma (z-a)^k\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt daraus $0 = d_m \cdot 2\pi i$ und somit $d_m = 0$, d.h. $c_m = c'_m$.

Da $m \in \mathbb{Z}$ beliebig war, sind die beiden Reihen identisch. ■

Beispiel.

Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion $f(z) = \sin(z)/z^2$ im Kreisring R_0^∞.

Es gilt

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

und daher ist

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \pm \dots$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 0$. □

Noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $a = 1$.

Es gilt

$$\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

und daher mit $w = 1/(1-z)$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3} + \dots \\ &= 1 - \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} - \frac{(z-1)^{-3}}{3!} \pm \dots \end{aligned}$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 1$. □

Und noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

in R_0^1 und in R_1^∞. In R_0^1, d.h. für $|z| < 1$, gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

und daher

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_0^1. In R_1^∞, d.h. $|z| > 1$, bekommen wir

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$

und somit

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_1^∞. □

6.7 Isolierte Singularitäten

Definition: *Eine analytische Funktion* f *hat in einem Punkt* $a \in \mathbb{C}$ *eine* isolierte Singularität, *falls* f *in einem Kreisring*

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \qquad \text{für } r > 0,$$

definiert ist, aber nicht im Punkt a. □

Beispiele:

- $f(z) = \sin(z)/z$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- $f(z) = 1/(1 + z^2)$ besitzt in $z = \pm i$ isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp(1/(1 - z))$ besitzt in $z = 1$ eine isolierte Singularität.
- Der komplexe Logarithmus $\mathrm{Log}(z)$ ist in $\{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}$ *nicht* definiert. Somit ist der Punkt $z = 0$ *keine* isolierte Singularität von $\mathrm{Log}(z)$.

□

Drei Typen isolierter Singularitäten.

Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Insbesondere ist f analytisch in $B_r(a) \setminus \{a\}$. Dann kann f in $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$

entwickelt werden. Wir unterscheiden drei Typen von isolierten Singularitäten.

Definition: *f besitze in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Dann heißt a*

- *eine* `hebbare Singularität` *von f, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;*
- *ein* `Pol der Ordnung m` *von f, falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$.*
- *eine* `wesentliche Singularität` *von f, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind.* □

Beispiel.

- Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

- f besitzt eine isolierte Singularität in $z = 0$.
- Wir bestimmen nun die Laurent-Reihe von f um Null.
- Mit der Taylor-Reihe der Sinus-Funktion

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

erhalten wir nach Division durch $z \neq 0$ die Laurent-Reihe

$$\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \dots$$

- Somit ist $z = 0$ eine hebbare Singularität von f. □

Noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = i$ von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i+2i} \\
&= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\left[1+\frac{i}{2}(z-i)+\left(\frac{i}{2}\right)^2(z-i)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2^2}(z-i)^0+\frac{i}{2^3}(z-i)+\ldots
\end{aligned}$$

- Somit hat f in $z = i$ einen Pol erster Ordnung. □

Und noch ein Beispiel.

- Wir untersuchen die isolierte Singularität $z = 1$ der Funktion

$$f(z) = \exp(1/(1-z)).$$

- Die Laurent-Entwicklung

$$\exp(1/(1-z)) = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \dots$$

  von f enthält unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von $z-1$.

- Somit ist $z = 1$ eine wesentliche Singularität von f. □

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Sei f eine rationale Funktion, d.h. mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$, gilt

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

- Dann besitzt f nur bei den Nullstellen von q isolierte Singularitäten.
- Sei z_0 Nullstelle der Ordnung m von $q(z)$, so dass

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

für ein Polynom $q_1(z)$ mit $q_1(z_0) \neq 0$. Somit gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{p(z)}{q_1(z)}$$

wobei $p(z)/q_1(z_0)$ um z_0 in eine Taylor-Reihe um z_0 entwickelt werden kann,

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich.

- Die Taylor-Reihe

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

konvergiert für ein $r > 0$ in dem Kreis $B_r(z_0)$ um z_0.

- So bekommt man die Laurent-Reihe

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{a_2}{(z - z_0)^{m-2}} + \cdots, \end{aligned}$$

die im Kreisring $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ konvergiert.

- Wie man an der Form der Laurent-Reihe sieht, ist z_0 entweder ein Pol oder eine hebbare Singularität von f, aber keine wesentliche Singularität. □

Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten.

Satz: *Sei* f *analytisch im Kreisring* $B_r(a) \setminus \{a\}$. *Weiterhin sei* a *eine hebbare Singularität von* f. *Dann existiert der Grenzwert*

$$\alpha := \lim_{z \to a} f(z)$$

Definiert man $f(a) := \alpha$, *so ist die derart erweiterte Funktion in der vollen Kreisscheibe* $B_r(a)$ *analytisch.* □

Beweis: Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

bekommt man sofort den Grenzwert $\alpha = c_0 = \lim_{z \to a} f(z)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} &= \lim_{z \to a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots - c_0}{z-a} \\ &= \lim_{z \to a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots}{z-a} = c_1. \end{aligned}$$

■

Der Satz von Riemann.

Es gilt die Umkehrung des vorigen Satzes, hier in seiner verschärften Form:

Satz (Satz von Riemann): *Die Funktion* f *besitze in* a *eine isolierte Singularität. Falls* f *in einem Kreisring* $B_r(a) \setminus \{a\}$ *beschränkt ist, so ist* a *eine hebbare Singularität von* f.

Beweis: Sei f beschränkt in $B_r(a) \setminus \{a\}$ mit $|f(z)| \le M$. Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle c_n mit $n < 0$, denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Für $n < 0$ bekommt man für $\rho \to 0$ den Grenzwert Null.

Somit gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$. ■

Werteverhalten bei Polstellen.

Aus dem Satz von Riemann ziehen wir zunächst die

Folgerung: Ist eine isolierte Singularität a von f nicht hebbar, so ist f in keiner Umgebung von a beschränkt. □

Satz: *Hat die Funktion f in a einen Pol, so gilt*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Aus der Laurent-Entwicklung von f um a,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \dots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m}\left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots\right] \end{aligned}$$

mit $m > 0$ und $c_{-m} \neq 0$, folgt die Behauptung unmittelbar. ■

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f(z) = \exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots.$$

- f besitzt in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.
- Für $z = x$, x reell und *positiv*, gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \exp(1/x) = \infty$$

- Für $z = x$, x reell und *negativ*, gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \exp(1/x) = \lim_{x \searrow 0} \exp(-1/x) = 0$$

- Für $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, existiert der Grenzwert nicht:

$$\lim_{z \to 0} \exp(1/z) = \lim_{y \to 0} \exp(1/(iy)) = \lim_{y \to 0} \exp(-i/y)$$

Der Satz von Casorati-Weierstrass.

Satz (Satz von Casorati-Weierstrass): *Die Funktion* f *besitze im Punkt* $a \in \mathbb{C}$ *eine wesentliche Singularität. Dann kommen die Werte von* f *in jeder Umgebung von* a *jeder komplexen Zahl beliebig nahe.*

Beweis durch Widerspruch: Sei $U = B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Umgebung von a. Weiterhin sei $w_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, der die Werte von f in U nicht beliebig nahe kommen, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \qquad \text{für alle } z \in U.$$

Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \qquad \text{für } z \in U$$

analytisch in U, und wegen $|g(z)| \leq 1/\epsilon$ beschränkt.

Beweis des Satzes von Casorati-Weierstrass.

Somit ist a eine hebbare Singularität von g, so dass in U die Darstellung

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m g_1(z)$$

für $m \geq 0$ gilt, wobei $g_1(z)$ in $B_r(a)$ analytisch ist. Daraus folgt die Darstellung

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} \qquad \text{für } z \in U$$

für f in U. Zusammen mit der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in U$$

erhalten wir die Laurent-Reihe von f in U,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \ldots,$$

im Widerspruch zur Annahme, wonach a wesentliche Singularität ist. ■

Der Hauptteil einer Laurent-Reihe.

Definition: *Sei* a *eine isolierte Singularität der Funktion* f*, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

die Laurent-Reihe von f *um* a*. Dann heißt die Funktion*

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

der zu a *gehörige* Hauptteil *von* f*.* □

Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in $1/(z-a)$.

Satz: *Eine rationale Funktion* f*, die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile,* $f = h_1 + h_2 + \ldots + h_N$.

Beweis: Sei f rational. Dann ist f in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, N,$$

von f. Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^{N} h_k$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ analytisch.

Da nun für jedes z_k der zugehörige Hauptteil h_k in der Laurent-Reihe von g um z_k wegfällt, ist z_k eine hebbare Singularität von g, für $k = 1, \ldots, N$.

Damit ist g eine ganze Funktion, d.h. g ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$.

Schließlich gilt

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) - \sum_{k=1}^{N} \lim_{z\to\infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist g beschränkt auf $\mathbb{C}$, nach dem Satz von Liouville konstant mit $g \equiv 0$. ■

6.8 Residuenkalkül

Erinnerung:

- Sei f analytisch auf einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G, d.h. G besitzt genau ein "Loch" L.
- Weiterhin seien Γ und Γ_1 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die das Loch L einmal umlaufen.
- **Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes:** Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

- **Ziel:** Weitere Verallgemeinerung auf mehrere Löcher $L_1, \ldots, L_N$.

Integrale in Gebieten mit zwei Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G, das zwei disjunkte Löcher L_1 und L_2 hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Kurve um L_1 und L_2.
- Weiterhin seien $\Gamma', \Gamma'' \subset G$ zwei geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$, wobei
  - Γ' das Loch L_1 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_2 umläuft);
  - Γ'' das Loch L_2 einmal im positiven Sinne umläuft (aber nicht L_1 umläuft).
- Dann gilt für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, die jeweils nur L_1 bzw. L_2 einmal im positiven Sinne umlaufen (siehe Skizze)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma''} f(z)\,dz$$

und weiterhin mit $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ die Formel

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Integrale in Gebieten mit mehreren Löchern.

- Sei f analytisch in einem Gebiet G, das N disjunkte Löcher $L_1, \ldots, L_N$ hat.
- Sei $\Gamma \subset G$ eine positiv orientierte Randkurve um $L_1, \ldots, L_N$.
- Weiterhin seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ geschlossene Kurven in G, wobei für $k = 1, \ldots, N$
  - Γ_k das Loch L_k einmal im positiven Sinne umläuft;
  - Γ_k keines der anderen Löcher (außer L_k) umläuft.
- Dann gilt die Formel

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

Bemerkung: Die Formel gilt insbesondere für den Fall, bei dem die Löcher L_k jeweils zu einem Punkt $z_k \in G$ zusammenfallen, d.h. f besitzt isolierte Singularitäten in $z_1, \ldots, z_N$. □

Zur Bedeutung des Laurent-Koeffizienten c_{-1}.

Erinnerung: Für die Koeffizienten der Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_k)^n \qquad \text{für } 0 < |z - z_k| < r$$

von $f(z)$ um z_k gilt die Darstellung

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}} \, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Insbesondere gilt die Formel

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) \, dz$$

bzw.

$$\int_{\Gamma_k} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

□

Das Residuum.

Definition: *Die Funktion* f *besitze im Punkt* a *eine isolierte Singularität. Dann kann* f *in einer Umgebung von* a *durch eine Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für } 0 < |z-a| < r$$

dargestellt werden. Der Koeffizient $c_{-1} \in \mathbb{C}$ *wird als* Residuum *von* f *in* a *bezeichnet. Wir verwenden dafür die Notationen*

$$\operatorname{Res} f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=a}.$$

□

Bemerkungen:

- Der Begriff des Residuums bezieht sich auf die Laurent-Reihe von f um a, die in der Umgebung $B_r(a) \setminus \{a\}$ gilt, nicht auf beliebigen Kreisringen $B_{r_1}^{r_2}(a)$.
- Insbesondere ist das Residuum von f in a eindeutig.
- Falls f analytisch in ganz $B_r(a)$, so gilt $\operatorname{Res} f(a) = 0$. □

Der Residuensatz.

Satz (Residuensatz):

Die Funktion f *sei bis auf endlich viele isolierte Singularitäten* $z_1, \ldots, z_N$ *in dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *analytisch. Weiterhin sei* $\Gamma \subset G$ *eine positiv orientierte geschlossene Kurve, die alle Singularitäten einmal umläuft. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Bemerkung: Die Integral-Darstellung im Residuensatz erweitert man wie folgt.

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \operatorname{Res} f(z)$$

denn es gilt $\operatorname{Res} f(z) = 0$ für alle $z \in G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$. Insbesondere gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in G_\Gamma} \operatorname{Res} f(z) = 0$$

(der Cauchysche Integralsatz), falls f auf ganz G analytisch ist. □

Residuenbestimmung in einem Pol erster Ordnung.

- Sei a Pol erster Ordnung von f.
- Dann besitzt f um a die Laurent-Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

- Somit gilt

$$(z-a)f(z) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \dots$$

in einer Umgebung von a. Für $z \to a$ bekommt man daraus

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Satz: *Die Funktion f besitze in $a \in \mathbb{C}$ einen Pol erster Ordnung. Dann gilt*

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

□

Folgerung.

Voraussetzungen: Die Funktion f besitze die Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q analytische Funktionen seien.

Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle, d.h.

$$q(a) = 0 \qquad \text{und} \qquad q'(a) \neq 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to a}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(a)}{z-a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

In diesem Fall ist a

- entweder ein Pol erster Ordnung von f (falls $p(a) \neq 0$);
- oder eine hebbare Singularität von f (falls $p(a) = 0$). □

Zusammenfassung. Sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine Funktion, wobei $p(z)$ und $q(z)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ analytisch seien. Weiterhin besitze q in a eine einfache Nullstelle. Falls $p(a) \neq 0$, so ist a ein Pol erster Ordnung von f mit Residuum

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Falls $p(a) = 0$, so ist a eine hebbare Singularität von f. □

Beispiel: Berechnen für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

das Residuum in $z = i$. Es gilt $f(z) = p(z)/q(z)$ mit $p(z) = 1, q(z) = 1 + z^2$,

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{1}{2z}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

Anwendungen des Residuensatzes.

Beispiel 1: Wir berechnen das uneigentliche reelle Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Setze

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

für $R > 0$, so dass $I = \lim_{R\to\infty} I_R$.

Wir schreiben das reelle Integral I_R als komplexes Integral

$$I_R = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz$$

längs des Integrationsweges $\Gamma' = [-R, R] \subset \mathbb{C}$ über die analytische Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Fortsetzung des Beispiels.

- Sei Γ'' der Halbkreis mit Mittelpunkt Null und Radius R, positiv orientiert von $(R, 0)$ nach $(-R, 0)$ (siehe Skizze).
- Für $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ gilt dann

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma'} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz = I_R + J_R.$$

- Betrachte das Integral

$$J_R = \int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

- Für $R > 1$ gilt $|1+z^2| \geq R^2 - 1$ auf Γ'' und somit

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} \qquad \text{für } z \in \Gamma''.$$

- Daraus folgt

$$|J_R| = \left|\int_{\Gamma''} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

- Weiter folgt $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit gilt

$$I = I_R = \int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

- Dieses Integral berechnen wir mit dem Residuensatz: Es gilt

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \mathrm{Res} f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

- **Elementare Berechnung des Integrals** (mit Methoden der reellen Analysis):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \arctan(x)\Big|_{-R}^{R} \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

□

Nächstes Beispiel. Betrachte das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}\,dx := I/2.$$

- Der Integrand ist gerade, und somit gilt

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz - J_R,$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$.

- Wir bestimmen das Integral I_R nun mit dem Residuensatz.

Fortsetzung des Beispiels.

- Der Integrand

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}$$

besitzt Pole erster Ordnung in den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.

- Für $R > \sqrt{2}$ werden die beiden Pole $z = \pm 1 + i$ von Γ umlaufen.
- Es gilt

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=1+i} = \frac{1}{4(1+i)^3} = \frac{1+i}{4(1+i)^4} = -\frac{1+i}{16}$$

$$\operatorname{Res} \frac{1}{z^4+4}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{1}{4(-1+i)^3} = \frac{-1+i}{4(-1+i)^4} = -\frac{-1+i}{16}$$

- Daraus folgt mit dem Residuensatz

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+4}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{16} - \frac{-1+i}{16}\right) = \frac{\pi}{4} = I.$$

□

Nächstes Beispiel. Betrachte für $a > 0$ und $\omega > 0$ das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx.$$

- Es gilt (mit entsprechenden Bezeichnungen aus dem vorigen Beispiel)

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{und} \qquad J_R = \int_{\Gamma''} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz$$

  wobei erneut $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$, und somit

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz.$$

- Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}\bigg|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}.$$

□

Letztes Beispiel. Betrachte für $0 < \alpha < 1$ das reelle Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha (1+x)}\, dx < \infty.$$

Zur Berechnung von I betrachten wir das komplexe Integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha (1+z)}\, dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

wobei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ (siehe Skizze). Der Integrand ist analytisch, bis auf einen Pol erster Ordnung in $z = -1$. Weiterhin gilt

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} I_1 = I. \qquad \lim_{R\to\infty} I_2 = 0 \qquad \lim_{\delta\to 0} I_4 = 0,$$

so dass das Integral

$$I_3 = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z^\alpha (1+z)}\, dz$$

zu bestimmen bleibt.

Fortsetzung des Beispiels. Parametrisiere den Integrationsweg $-\Gamma_3$ mit $z(t) = t$ für $\delta \le t \le R$. Nun gilt mit $z^\alpha = |z|^\alpha e^{2\pi i\alpha}$ auf Γ_3

$$I_3 = -\int_\delta^R \frac{e^{-2\pi i\alpha}}{t^\alpha(1+t)}\,dt = -e^{-2\pi i\alpha} I_1$$

somit

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}} \int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz = I(1-e^{-2\pi i\alpha}).$$

Mit dem Residuensatz bekommen wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,dz = \operatorname{Res}\frac{1}{z^\alpha(1+z)}\bigg|_{z=-1} = \operatorname{Res}\frac{z^{-\alpha}}{1+z}\bigg|_{z=-1} = e^{-i\alpha\pi},$$

somit

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}} e^{-i\alpha\pi} = \pi\frac{2i}{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}}$$

bzw.

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Das Integral ist für $\alpha \to 0$ bzw. $\alpha \to 1$ divergent. □

7 Fourier-Transformation

Ausgangspunkt: Die bereits bekannte Fourier-Reihenentwicklung einer T-periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f_T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit Frequenz } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

und mit Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Interpretationen und Begriffe.

- f_T fassen wir auf als ein zeitkontinuierliches T-periodisches Signal.
- Dann stellt der Fourier-Koeffizient γ_k den Verstärkungsfaktor für die Grundschwingung $e^{-ik\omega\tau}$ zur Frequenz

$$\omega_k = k\frac{2\pi}{T} \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dar.

- Somit beschreiben die γ_k die Amplituden der beteiligten Schwingungen.
- Die Folge $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ wird als Spektrum von f_T bezeichnet.
- Das Spektrum ist eine diskrete Menge von Fourier-Koeffizienten.
- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingungen beschränkt (und umgekehrt). □

Alternative Darstellung der Fourier-Reihe.

Ausgangspunkt: Wir schreiben die Frequenz ω als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega$$

Alternative Darstellung: Dann kann die Fourier-Reihe dargestellt werden als

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)}\, d\tau \cdot \Delta\omega.$$

Fragen:

- Besitzt ein `nicht-periodisches` Signal $f(t)$ eine entsprechende Fourier-Darstellung? Etwa eine Fourier-Reihe? Oder etwas anderes?
- Falls ja, unter welchen Voraussetzungen?
- Wie sieht das Spektrum dann aus?

Herleitung der gewünschten Fourier-Darstellung.

Grundidee: Fasse *nicht-periodisches* Signal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ als Signal mit *unendlicher* Periode auf, d.h. wir betrachten den Grenzübergang

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$$

mit einer (geeigneten) T-periodischen Funktion f_T.

- Setzt man hierzu

$$g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau,$$

so bekommt man die Darstellung

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_T(\omega_k) e^{i\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

- **Beachte:** Dies ist eine Riemannsche Summe mit Zerlegung $\{\omega_k\}_k$, die für große Perioden T beliebig fein werden kann.

So bekommen wir eine Fourier-Integraldarstellung.

Setze

$$g(\omega) := \lim_{T\to\infty} g_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \qquad \text{für } \omega \in \mathbb{R}.$$

Definition: *Falls das Integral*

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so wird die Funktion g als Fourier-Transformierte *der Funktion f bezeichnet.* □

Vermutung: Es gilt (mit $T \to \infty$) die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

bzw.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\omega)}\,d\tau\,d\omega.$$

Wann gilt die Fourier-Umkehrformel?

Satz: *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze* f *in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral*

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\,d\omega.$$

Falls f *bei* $t_0 \in \mathbb{R}$ *unstetig ist, so liefert das Doppelintegral auf der rechten Seite der Fourier-Umkehrformel für* $t = t_0$ *den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes von* f *für* $t \to t_0$*, d.h. es gilt*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t \nearrow t_0} f(t) + \lim_{t \searrow t_0} f(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t_0-\omega)}\,d\tau\,d\omega.$$

□

Diskrete/Kontinuierliche Fourier-Transformation.

Diskrete Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Reihendarstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\gamma_k \equiv \gamma_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

□

Beispiel. Berechne die Fourier-Transformation $\hat{f}$ des Rechtecksimpulses

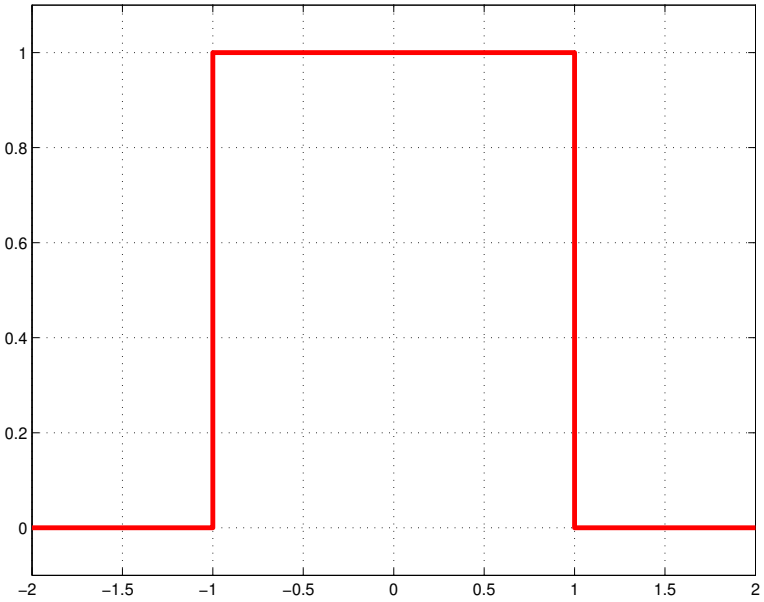
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \le t \le a; \\ 0 & \text{für } |t| > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) & \text{für } z \neq 0 \\ 2a & \text{für } z = 0 \end{array} \right\} = 2a \cdot \operatorname{sinc}(\omega a) \end{aligned}$$

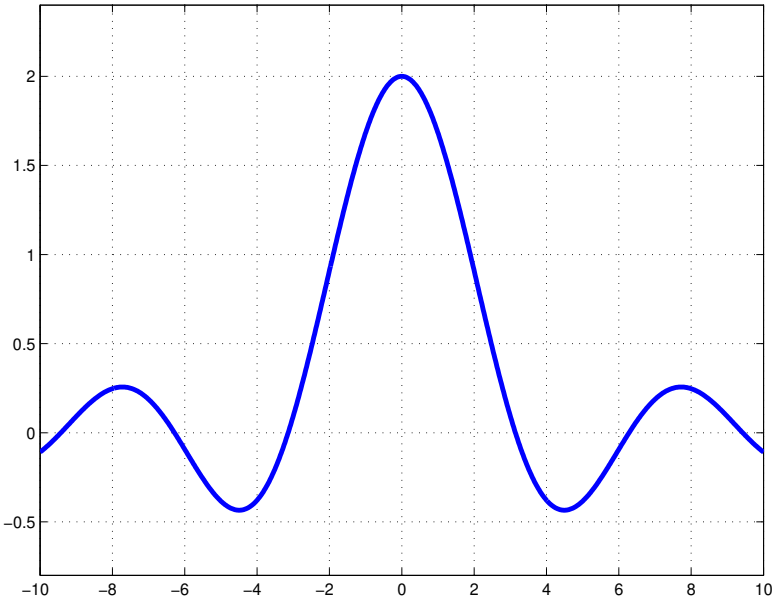
mit der sinc-Funktion

$$\operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\sin(z) & \text{für } z \neq 0; \\ 1 & \text{für } z = 0; \end{cases}$$

Graphen von Einheitsimpuls und Sinc-Funktion.



Der Einheitsimpuls $f(t)$.



Die sinc-Funktion $\hat{f}(\omega)$.

Beispiel. Berechne die entsprechende Fourier-Umkehrung von

$$\hat{f}(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(\omega a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega t)}{\omega}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t)) + \sin(\omega(a-t))}{\omega}\,d\omega
\end{aligned}$$

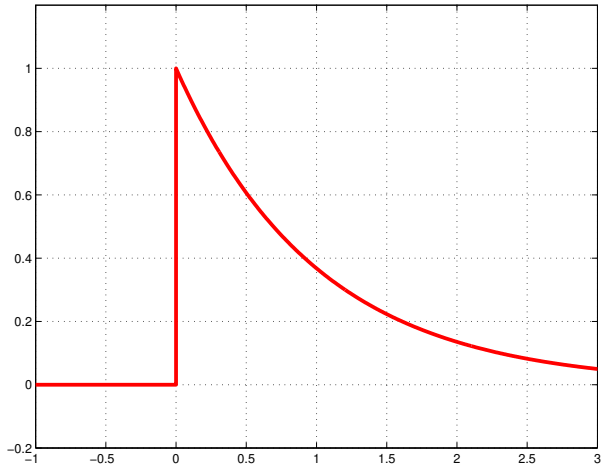
Übung: Verwende den Residuensatz, um Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\,dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$. □

Beispiel. Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0; \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$



Graph von f.

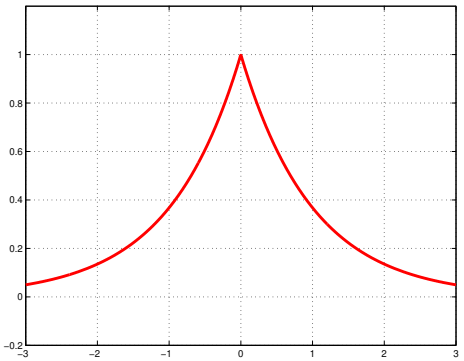
$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Beispiel.

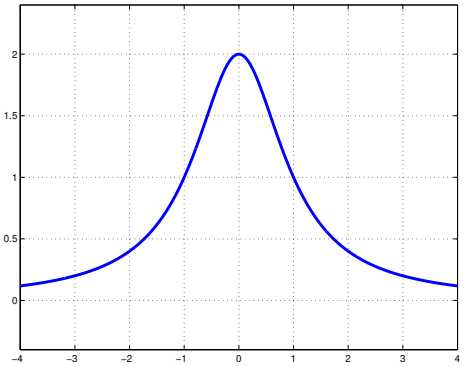
Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a+i\omega)t}\,dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}. \end{aligned}$$



Grpah von $f(t)$.



Graph von $\hat{f}$.

Bemerkungen zur Fourier-Transformation.

- Zerlegt man die Fourier-Transformation der *reellen* Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in Realteil und (verschwindenden!) Imaginärteil, so folgt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(t-\tau)]\, d\tau\, d\omega = 0$$

die trigonometrische Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(t-\tau)]\, d\tau\, d\omega$$

- Falls f eine gerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau)\, d\tau\, d\omega.$$

- Falls f eine ungerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau)\, d\tau\, d\omega.$$

Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer Integraloperator bzw. Integraltransformation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\bar{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

Weitere Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a) \end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Es gelten die Faltungssätze

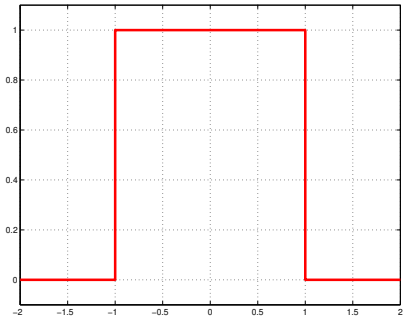
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega) \end{aligned}$$

□

Beispiel.

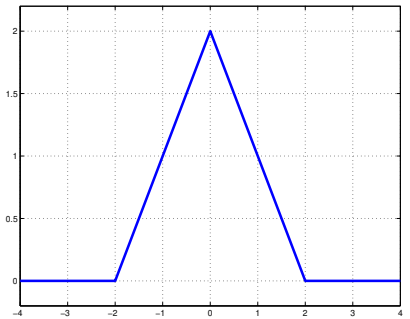
Für die Autokorrelation $f * f$ des Einheitsimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le t \le 1; \\ 0 & \text{für } |t| > 1; \end{cases}$$



bekommt man die Hutfunktion

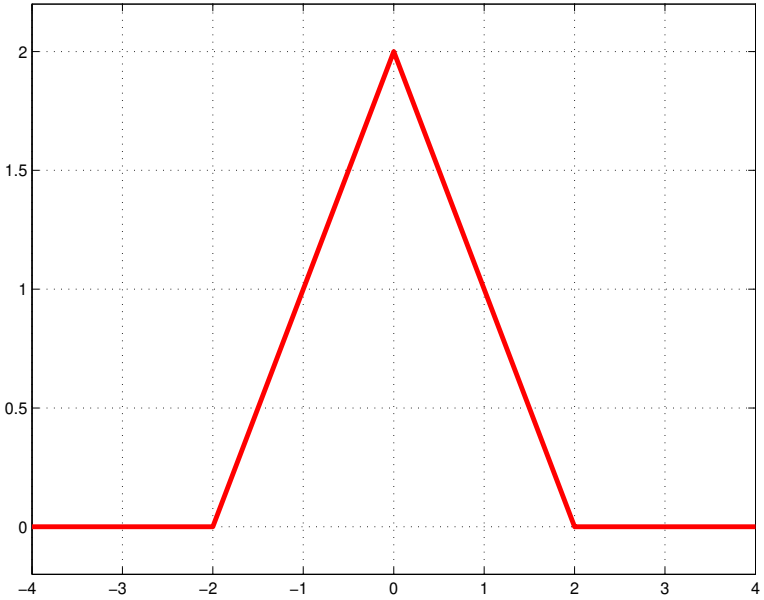
$$g(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{für } -2 \le t \le 2; \\ 0 & \text{für } |t| > 2; \end{cases}$$



und somit gilt nach dem Faltungssatz

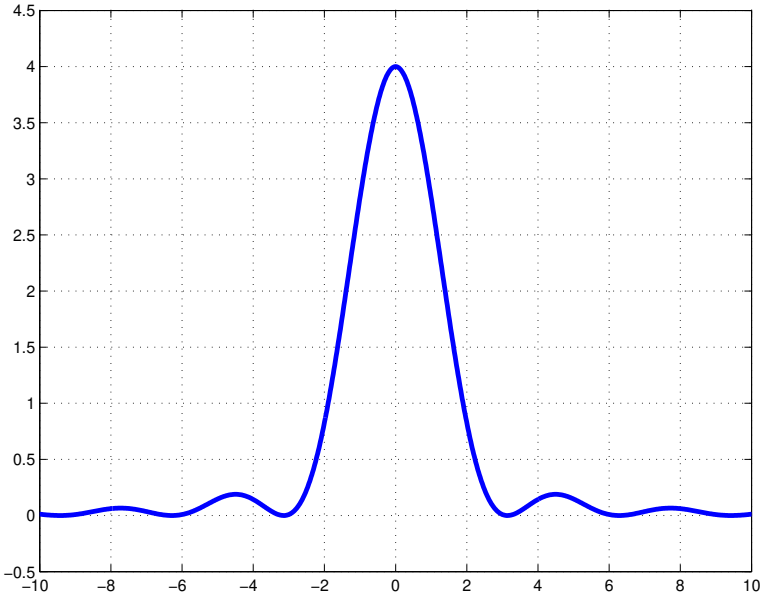
$$F[g](\omega) = F[f * f](\omega) = (F[f](\omega))^2 = 4\mathrm{sinc}^2(\omega).$$

Die Hutfunktion und ihre Fourier-Transformation.



Hutfunktion

$f(t)$.



Fourier-Transformation

$\hat{f}(\omega) = 4\text{sinc}^2(\omega)$.

Differentiation der Fourier-Transformation.

Satz: *Ist* f *eine stückweise* C^1*-Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen* $t_1, \ldots, t_m$*, und sind* f *und* f' *absolut integrierbar, d.h.*

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty \qquad \textit{und} \qquad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}$$

Beweis: O.E. für eine Unstetigkeitsstelle, t_1, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt &= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{t_1} + \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t_1}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \left(f(t_1^-) - f(t_1^+)\right) e^{-i\omega t_1} + i\omega\mathcal{F}[f](\omega)
\end{aligned}$$

wobei $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ verwendet wurde (wegen $f \in L_1(\mathbb{R})$). ■

Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichung.

Ziel: Bestimme eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

die den Wachstumsbedingungen

$$\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{|t|\to\infty} y'(t) = 0$$

genügt. Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$\left(-\omega^2 + i\omega a + b\right) Y(\omega) = C(\omega),$$

wobei $Y = \mathcal{F}[y]$ und $C = \mathcal{F}[c]$. Somit gilt

$$Y(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega a + b} C(\omega).$$

Rücktransformation liefert mit dem Faltungssatz die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} \, d\tau \, d\omega.$$

Anwendung: Wärmeleitung.

Ausgangspunkt: Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für einen *unendlich* langen Stab,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= c u_{xx}(x,t) \quad \text{für } -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$\begin{aligned} U_t(\omega,t) &= c(i\omega)^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) &= U_0(\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$U(\omega,t) = U_0(\omega) e^{-c\omega^2 t},$$

wobei $U = \mathcal{F}[u]$ die Fourier-Transformation von $u \equiv u(\cdot,t)$ bezeichnet.

Fortsetzung des Anwendungsbeispiels.

Zur Rücktransformation bestimmen wir zunächst das Urbild von $e^{-ct\omega^2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-ct\omega^2}\right](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\omega^2} e^{i\omega x}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\omega]^2 - ix/\sqrt{ct}[\sqrt{ct}\omega] - x^2/(4ct)\right)} \cdot e^{-x^2/(4ct)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/(4ct)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\omega] - ix/(2\sqrt{ct})\right)^2}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} e^{-x^2/(4ct)}.
\end{aligned}$$

Mit Anwendung des Faltungssatzes bekommt man die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi)\,d\xi.$$

Der Faktor $G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}$ heißt **Greensche Funktion**. □

Anwendung: Potentialgleichung.

Ausgangspunkt: Betrachte das Potentialproblem auf der Halbebene.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Fourier-Transformation bez. der Ortsvariablen x ergibt

$$U_{yy}(\omega, y) = -(i\omega)^2 U(\omega, y) = \omega^2 U(\omega, y)$$

und somit

$$U(\omega, y) = C_1 e^{|\omega| y} + C_2 e^{-|\omega| y}$$

Da die Lösung für $|y| \to \infty$ verschwindet, gilt $C_1 = 0$ und somit

$$U(\omega, y) = U_0(y) e^{-|\omega| y}.$$

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\omega| y}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{y^2 + x^2}$ und weiterhin mit dem Faltungssatz

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Das Theorem von Shannon.

Satz (Shannonsches Abtasttheorem)**:**

Sei $f(t)$ *ein bei* $t = 0$ *einsetzendes und für alle* $t \geq 0$ *definiertes Signal. Durch* $f(-t) = f(t)$ *werde* f *zu einer geraden Funktion auf* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt. Weiterhin erfülle* f *die Voraussetzungen für den Satz über die Fourier-Umkehrformel. Schließlich sei das Spektrum von* f *beschränkt, d.h. für ein* $\omega_0 > 0$ *gilt*

$$\hat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{für } |\omega| > \omega_0 > 0.$$

Tastet man f *zu den Zeitpunkten*

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ab, so kann f *aus diesen Informationen für alle* t *exakt rekonstruiert werden.*

Beweis: Unter den Voraussetzungen für die Fourier-Umkehrformel gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Setze $\hat{f}(\omega)$ zu einer $2\omega_0$-periodischen Funktion fort, mit

$$\hat{f}(\omega \pm 2\omega_0) = \hat{f}(\omega).$$

Dann besitzt die Fourier-Reihe

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega}$$

die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{\omega_0}\omega} \, d\omega$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man mit der Fourier-Umkehrformel schreiben als

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} f(t_k)$$

Setzt man die Darstellung von $\hat{f}$ in die Umkehrformel ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\,d\omega, \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{i(t+k\pi/\omega_0)}\left[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}\right]_{\omega=-\omega_0}^{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_0 c_k \frac{1}{\omega_0 t+k\pi}\sin(\omega_0 t+k\pi). \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\frac{\sin(\omega_0 t+k\pi)}{\omega_0 t+k\pi} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

8 Laplace-Transformation

Ausgangspunkt: Die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

besitzt **keine** Fourier-Transformation.

Denn: Formal bekommt man das unbestimmte Integral

$$\hat{u}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \frac{1}{i\omega}\left[1 - \lim_{\tau\to\infty}(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau))\right]$$

das für $\omega \neq 0$ offensichtlich nicht existiert.

Beachte: $u \notin L_1(\mathbb{R})$.

Gibt es alternative Integraltransformationen?

Voraussetzung: Ab sofort $f(t) = 0$ für $t < 0$, so dass formal (wie eben)

$$g(\omega) := \hat{f}(\omega) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Nun: Um Konvergenz zu erzwingen, verwenden wir konvergenzerzeugenden Faktor e^{-at}, für $a > 0$, und betrachten stattdessen das uneigentliche Integral

$$G(\omega) = \int_0^\infty F(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \qquad \text{wobei } F(\tau) = e^{-a\tau} f(\tau) \quad \text{für } a > 0.$$

und somit

$$G(\omega) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-(a+i\omega)\tau}\, d\tau$$

Beachte: Es gelten (unter Voraussetzungen an f) die (Fourier-)Umkehrformeln

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(\omega) e^{(a+i\omega)t}\, d\omega. \end{aligned}$$

Konstruktion der Laplace-Transformation.

Ausgangspunkt: Mit der Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{(a+i\omega)t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-(a+i\omega)\tau}e^{(a+i\omega)t}\,d\tau\,d\omega$$

und der Substitution $s = a + i\omega \in \mathbb{C}$ erhält man mit dem Symbol

$$[\mathcal{L}(f)](s) := G\left(\frac{s-a}{i}\right) = G(\omega)$$

die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau =: \phi(s)$$

sowie die Laplace-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds =: \left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t).$$

□

Die Laplace-Transformation und deren Inverse.

Definition: *Falls für* f *das uneigentliche Integral*

$$[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \phi(s)$$

existiert, so bezeichnet man ϕ *als* Laplace-Transformation *von* f.

Falls für ϕ *das uneigentliche Integral*

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s)e^{st}\,ds$$

existiert, so bezeichnet man $\mathcal{L}^{-1}(\phi)$ *als* inverse Laplace-Transformation *von* ϕ. *Der Integraloperator* $\mathcal{L}^{-1}$ *wird entsprechend als* inverse Laplace-Transformation *bezeichnet.*

Somit gilt (unter geeigneten Voraussetzungen)

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f)](s) \qquad \textit{und} \qquad f(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\phi)](t).$$

□

Zur Existenz der Laplace-Transformation.

Satz: *Sei* f *auf* $(0,\infty)$ lokal integrierbar, *und es gelte*

$$|f(t)| \le Me^{\gamma t} \qquad \text{für alle } t \ge 0$$

mit geeigneten Konstanten M *und* γ, *so existiert die Laplace-Transformation*

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \gamma$.

Beweis: Mit $f(t)$ ist auch $e^{-st}f(t)$ lokal integrierbar, und wegen

$$\left|e^{-st}f(t)\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)\cdot t}|f(t)|$$

gilt mit dem Majorantenkriterium sogar absolute Konvergenz,

$$\left|\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right| \le \int_0^\infty Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\gamma)\tau}\,d\tau = \frac{M}{\mathrm{Re}(s)-\gamma}. \qquad \blacksquare$$

- Das Infimum aller γ mit obiger Abschätzung heißt Konvergenzabzisse von f.

Beispiele.

Beispiel 1: Für die Heaviside-Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

gilt

$$[\mathcal{L}(u)](s) = \phi(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\,d\tau = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. In diesem Fall ist $\gamma_0 = 0$ die Konvergenzabzisse.

Beispiel 2: Für $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(\beta)$ (und somit $\gamma_0 = -\mathrm{Re}(\beta)$) gilt

$$\left[\mathcal{L}\left(e^{-\beta t}\right)\right](s) = \int_0^\infty e^{-(\beta+s)\tau}\,d\tau = \frac{1}{s+\beta}.$$

Weiteres Beispiel.

Beispiel 3: Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) &= \int_0^\infty \sin(\beta\tau) e^{-s\tau}\,d\tau \\
&= -\frac{1}{\beta}\left[\cos(\beta\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \frac{s}{\beta}\int_0^\infty \cos(\beta\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\beta} - \frac{s}{\beta}\left\{\frac{1}{\beta}\left[\sin(\beta\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \frac{s}{\beta}\int_0^\infty \sin(\beta\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right\}
\end{aligned}$$

und somit

$$\left(1 + \frac{s^2}{\beta^2}\right)[\mathcal{L}(\sin(\beta t))](s) = \frac{1}{\beta} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

Analog zeigt man

$$[\mathcal{L}(\cos(\beta t))](s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

□

Noch ein Beispiel.

Beispiel 4: Betrachte für $s > 0$ (reell und positiv) die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \int_0^\infty \tau^n e^{-s\tau}\, d\tau$$

so folgt (mit der Substitution $\xi = s\tau$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi}\, d\xi = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad \text{für } s > 0,$$

und somit (für $n \in \mathbb{N}_0$)

$$[\mathcal{L}(t^n)](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{für } s > 0.$$

□

Laplace-Transformation von Ableitungen.

Erfüllt f' für $f \in C^1$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes zur Existenz der Laplace-Transformation, so bekommt man für die Laplace-Transformation

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \int_0^\infty f'(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau$$

mit partieller Integration

$$[\mathcal{L}(f')](s) = \left[f(\tau)e^{-s\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} + s\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau,$$

so dass mit (der angegebenen Voraussetzung) $\lim_{\tau\to\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = 0$ gilt

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s\cdot[\mathcal{L}(f)](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen von f gilt unter entsprechenden Voraussetzungen

$$\left[\mathcal{L}(f^{(n)})\right](s) = s^n\cdot[\mathcal{L}(f)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).$$

□

Noch mehr Beispiele.

Beispiel 5: Mit der Substitution $k\tau = \xi$ bekommt man für

$$[\mathcal{L}(f(kt))](s) = \int_0^\infty f(k\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \qquad \text{für } k > 0$$

das Resultat

$$[\mathcal{L}(f(kt))](s) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{s}{k}\xi}\,d\xi = \frac{1}{k}[\mathcal{L}(f(t))](s/k)$$

Beispiel 6: Es gilt

$$[\mathcal{L}(t\cdot f(t))](s) = \int_0^\infty \tau f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

und daraus folgt die Implikation

$$\phi(s) = [\mathcal{L}(f(t))](s) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi'(s) = -[\mathcal{L}(t\cdot f(t))](s).$$

□

Verschiebungssätze.

Erster Verschiebungssatz: Es gilt der erste Verschiebungssatz

$$\left[\mathcal{L}(e^{-kt}f(t))\right](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-(s+k)\tau}\,d\tau = [\mathcal{L}(f(t))](s+k)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \max(\gamma_0, \gamma_0 - k)$. Mit der Rücktransformation erhält man

$$\left[\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))\right](t) = e^{-kt}\mathcal{L}^{-1}[(\phi(s-k))](t),$$

Zweiter Verschiebungssatz: Es gilt der zweite Verschiebungssatz

$$[\mathcal{L}(f(t-k))](s) = e^{-sk}[\mathcal{L}(f(t))](s).$$

□

Faltungssatz.

Satz: *Für die* Faltung *(*Konvolution*)*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

zweier Funktionen f *und* g *gilt (unter den vorigen Voraussetzungen) die Formel*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f * g)](s) &= \int_0^\infty (f * g)(\alpha)e^{-s\tau}\,d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\alpha f(\tau)g(\alpha-\tau)\,d\tau\, e^{-s\alpha}\,d\alpha\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge bekommt man

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f*g)](s) &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(\alpha-\tau)e^{-s\alpha}\,d\alpha\,d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_\tau^\infty g(\alpha-\tau)e^{-s(\alpha-\tau)}\,d\alpha\,d\tau\end{aligned}$$

und weiterhin (mit der Substitution $\rho = \alpha - \tau$ im zweiten Integral)

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f*g)](s) &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho}\,d\rho\,d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\cdot\int_0^\infty g(\rho)e^{-s\rho}\,d\rho \\ &= [\mathcal{L}(f)](s)\cdot[\mathcal{L}(g)](s)\end{aligned}$$

■

Beispiel.

Betrachte die Funktion

$$H(s) = \frac{1}{s^3(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} =: F(s) \cdot G(s)$$

Für $f(t) = t^2/2$ (Beispiel 4) und $g(t) = \sin(\omega t)/\omega$ (Beispiel 3) gilt

$$[\mathcal{L}(f)](s) = F(s) \qquad \text{und} \qquad [\mathcal{L}(g)](s) = G(s)$$

Mit dem Faltungssatz gilt daher

$$h(t) := [\mathcal{L}^{-1}(H)](t) = [\mathcal{L}^{-1}(F \cdot G)](t) = (f * g)(t)$$

und somit (unter zweifacher Verwendung partieller Integration)

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t \tau^2 \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \\ &= \frac{t^2}{2\omega^2} - \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^4}. \end{aligned}$$

□