

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Sommersemester 2024

## Inhalte der Vorlesung Komplexe Funktionen.

- 1 Komplexwertige Funktionen einer Variablen.
- 2 Möbius–Transformation.
- 3 Komplexe Differentiation.
- 4 Konforme Abbildungen.
- 5 Komplexe Integration.
- 6 Cauchysche Integralformel und Anwendungen.
- 7 Taylor– und Laurent–Reihenentwicklungen.
- 8 Isolierte Singularitäten und Residuen.
- 9 Residuenkalkül.
- 10 Fourier–Transformationen und partielle Differentialgleichungen.

# Kapitel 1. Komplexe Zahlen

**Ausgangspunkt:** Betrachte die **kubische** Gleichung

$$x^3 = 3px + 2q$$

und die Lösungsformel (nach Gerolamo Cardano, 16. Jahrhundert)

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Rafael Bombelli (ebenfalls 16. Jahrhundert) betrachtet die Gleichung

$$x^3 = 15x + 4$$

und erhält aus der Lösungsformel

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli definiert die imaginäre Einheit  $i$  mittels  $i^2 = -1$ , die komplexen Zahlen sowie deren Addition und Multiplikation.



## Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

**Startpunkt:** Verwende **symbolische** Lösung  $i$  für Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ , sodass

$$i^2 = -1$$

Die Zahl  $i$  heißt **imaginäre Einheit**.

**Nächster Schritt:** Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf  $\mathbb{C}$  ein.

- **Addition**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

- **Multiplikation**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Damit besitzt  $\mathbb{C}$  eine algebraische Struktur.



# Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen.

- Was ist eigentlich  $i$ ?
- Kann man mit den obigen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ ?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in  $\mathbb{C}$  geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

## Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

**Ausgangspunkt:** Betrachte die Menge  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } \text{Addition}$

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

und **Multiplikation**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

**Beobachtung:** Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h.  $(1, 0) \in \mathbb{C}$  ist **neutrales Element der Multiplikation**. Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \quad \text{für } (a, b) \neq (0, 0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das **multiplikative Inverse** zu  $(a, b)$ ,

$$(x, y) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

## Zur Struktur der komplexen Zahlen.

**Bemerkung:** Die Menge  $\mathbb{R}^2$  bildet mit der Addition und der Multiplikation einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**, ab sofort bezeichnet mit  $\mathbb{C}$ .

**Beobachtung:** Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch  $\varphi(a) = (a, 0)$  ist injektiv. Für alle  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\varphi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

$$\varphi(a_1 a_2) = (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$$

**Fazit:**

- Wir können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form  $(a, 0)$  identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen **Unterkörper** von  $\mathbb{C}$ ;
- Die Rechenregeln in  $\mathbb{C}$  sind konsistent mit den Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ .

## Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

**Bemerkung:** Die reellen Zahlen bilden einen **angordneten Körper**; es gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**.

- Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x > 0$  oder  $x = 0$  oder  $x < 0$ ;
- Für  $x > 0$  und  $y > 0$  gilt  $x + y > 0$ ;
- Für  $x > 0$  und  $y > 0$  gilt  $xy > 0$ .

**Frage:** Ist der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen angeordnet?

**Antwort: NEIN!**

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre  $\mathbb{C}$  angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch  $0 < 1 + (-1) = 0$ .

# Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

## Vereinfachung der Notation:

- Für  $a \in \mathbb{R}$  schreiben wir  $a$  statt  $(a, 0)$ ;
- Die komplexe Einheit  $(0, 1)$  notieren wir mit  $i$ ;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl  $(a, b)$  schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

**Fazit:** Wir haben mit  $\mathbb{C}$  einen Körper konstruiert, der  $\mathbb{R}$  umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in  $\mathbb{C}$  lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten  $\pm i$ .

## Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit  $z$  oder  $w$ . Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt  $x$  der **Realteil** und  $y$  der **Imaginärteil** von  $z$ , kurz

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(az) = a \operatorname{Im}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } z \neq 0.$$

# Die komplexe Zahlenebene.

## Geometrische Veranschaulichung:

Wir stellen  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  als **Punkt** in der

**komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)**

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^2$ , mit einer **reellen Achse**,  $\mathbb{R}$ , und einer **imaginären Achse**,  $i \cdot \mathbb{R}$ .

## Geometrische Veranschaulichung der Addition:

Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.

**Darstellung** der Addition zweier komplexer Zahlen auf **Folie**.

# Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

die **konjugiert** komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Insbesondere gilt  $z = \bar{z}$  genau dann, wenn  $z \in \mathbb{R}$ .

# Die Betragsfunktion.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den **Betrag** von  $z$  sowie  $|z - w|$  für den **Abstand** zweier Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt  $|z| = |z - 0|$  den euklidischen Abstand von  $z$  zum Ursprung dar.
- Für  $z \in \mathbb{R}$  stimmt  $|z|$  mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

**Satz:** Die Betragsfunktion liefert eine **Norm** auf  $\mathbb{C}$ , denn es gelten die Relationen

- 1  $|z| \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $|z|$  genau dann, wenn  $z = 0$ ;
- 2  $|z + w| \leq |z| + |w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  (**Dreiecksungleichung**);
- 3  $|zw| = |z| \cdot |w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .



# Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenebene gilt für  $z = x + iy$  mit den **Polarkoordinaten**

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die **Eulersche Formel**

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

wobei  $\varphi \in [0, 2\pi)$  für  $z \neq 0$  den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch  $z = (x, y)$  darstellt.

Der Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  wird ebenso als **Argument** von  $z \neq 0$  bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

**Beispiel:**  $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$ ,  $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$ , somit gilt  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .



## Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$z = |z| (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad \text{und} \quad w = |w| (\cos(\psi), \sin(\psi))$$

gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)(\cos(\psi) + i \sin(\psi)) \\ &= |z| \cdot |w| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \exp(i\varphi) \exp(i\psi) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi))$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  gilt analog

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$



## Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die  **$n$ -te Potenz**  $z^n$  von  $z \in \mathbb{C}$  gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die  $n$  paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als  **$n$ -te Einheitswurzeln** bezeichnet.





## Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

Eine **komplexe Funktion**  $w = f(z)$  ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $D \subset \mathbb{C}$ , d.h. jedem  $z \in D$  wird ein eindeutiges  $w = f(z) \in \mathbb{C}$  zugeordnet.

Die Menge  $D$  ist der **Definitionsbereich** von  $f$ . Die Menge

$$W = f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$$

der **Bild- oder Wertebereich**.

**Notationen:**

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re}(w)$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im}(w)$$

Zur geometrischen Veranschaulichung komplexer Funktionen verwendet man häufig Bilder von **Koordinatennetzen**.

## Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

### 2.1 Lineare Funktionen

**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **linear**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

**Frage:** Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

**Spezialfall 1:** Die Wahl  $a = 1$  führt zu einer **Translation** um  $b$ ,

$$f(z) = z + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

**Spezialfall 2:** Die Wahl  $a \in (0, \infty)$  und  $b = 0$  führt zu einer **Streckung** bzw. **Stauchung**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

d.h. der Betrag von  $z$  wird **gestreckt** ( $a > 1$ ) oder **gestaucht** ( $0 < a < 1$ ). Allgemein spricht man von einer **Skalierung** mit **Skalierungsfaktor**  $a > 0$ .

## Weitere Spezialfälle linearer Funktionen.

**Spezialfall 3:** Die Wahl  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| = 1$  und  $b = 0$  führt zu einer **Drehung** bzw. **Rotation**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

Genauer: eine Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , wobei  $\alpha = \arg(a)$  bzw.  $a = \exp(i\alpha)$ .

**Spezialfall 4:** Die Wahl  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  und  $b = 0$  führt zu einer **Drehstreckung**

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.

Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  und eine Skalierung um  $|a|$ .

## Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

## 2.2 Quadratische Funktionen

**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **quadratisch**, falls  $f$  für feste Konstanten  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter  $f$ .

Setze  $w = z^2$ . Dann ergibt sich für  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy.$$

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .

Für das Bild einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = y_0$  bekommt man somit

$$u = x^2 - y_0^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy_0$$

Für  $y_0 = 0$  (die  $x$ -Achse) bekommen wir  $u = x^2$  und  $v = 0$ .

Für  $y_0 \neq 0$  können wir  $x$  mit  $x = v/(2y_0)$  eliminieren, und bekommen somit

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2,$$

eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur  $u$ -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten  $u = -y_0^2$  (mit  $u$ -Achse) und  $v = \pm 2y_0^2$  ( $v$ -Achse).

**Fazit:** Die Schar zur  $x$ -Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion  $f(z) = z^2$  auf eine Schar **konfokaler** (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden  $y = y_0$  und  $y = -y_0$  werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .

Für das Bild einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = x_0$  bekommt man somit

$$u = x_0^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2x_0y$$

Für  $x_0 = 0$  (die  $y$ -Achse) bekommen wir  $u = -y^2$  und  $v = 0$ .

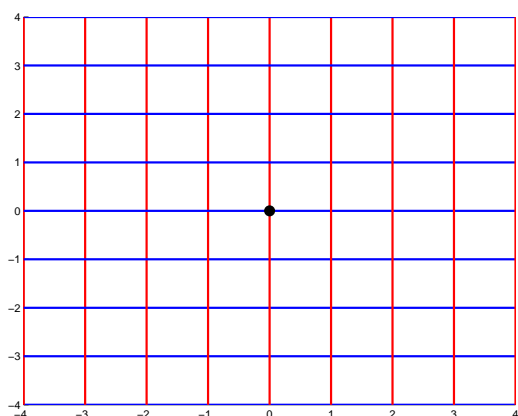
Für  $x_0 \neq 0$  können wir  $y$  mit  $y = v/(2x_0)$  eliminieren, und bekommen somit

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur  $u$ -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten  $u = x_0^2$  (mit  $u$ -Achse) und  $v = \pm 2x_0^2$  ( $v$ -Achse).

**Fazit:** Die Schar zur  $y$ -Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion  $f(z) = z^2$  auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet. Die Geraden  $x = x_0$  und  $x = -x_0$  werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .



Urbild.

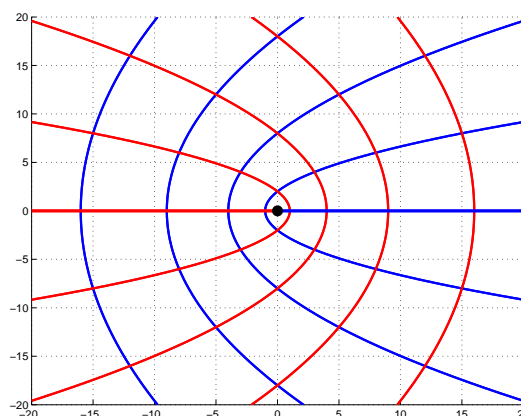


Bild von  $f(z) = z^2$ .

# Allgemeine quadratische Funktionen.

Für  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$ , und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- ① der Translation  $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$ ;
- ② der quadratischen Funktion  $f_2(z) = z^2$ ;
- ③ der Drehstreckung  $f_3(z) = az$ ;
- ④ der Translation  $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$ .

## Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

### 2.3 Die Exponentialfunktion

**Definition:** Die **komplexe Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \quad \text{für } z = x + iy.$$

**Beachte:** Es gilt das Additionstheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

**Frage:** Wie sieht die komplexe Exponentialfunktion  $z \rightarrow \exp(z)$  aus?

Für  $w = \exp(z)$ ,  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

und somit

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y)$$

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

Für das Bild einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = y_0$  bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y_0)$$

- Für festes  $y_0$  ergibt dies einen vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $y_0$  einschließt.
- Für Winkel  $y_0$  und  $y_1$ , die sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z},$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

- **Genauer:** Wegen der **Periodizität** von  $\exp(z)$  gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

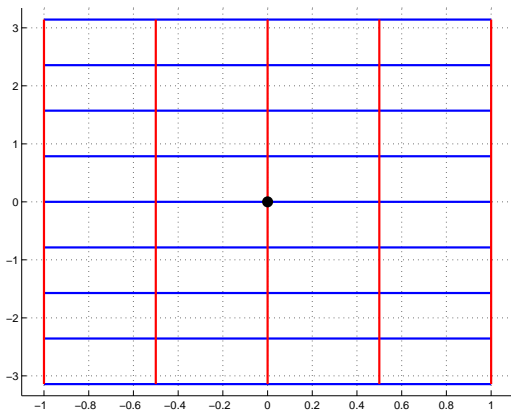
## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

Für das Bild einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = x_0$  bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes  $x_0$  ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius  $e^{x_0}$ .
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = 0$ . Somit gilt  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechteckgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netze von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion  $\exp$  auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **winkeltreu** bzw. **konform**. Genauere Details dazu später.

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .



Urbild.

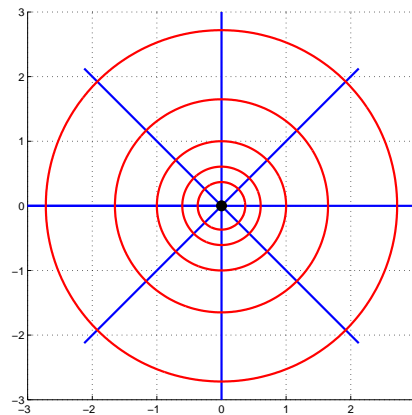


Bild von  $f(z) = \exp(z)$ .

## Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

### 2.4 Die Umkehrfunktion

**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f(z)$  heißt **injektiv**, wenn es zu jedem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  ihres Wertebereichs genau einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ihres Definitionsbereichs gibt mit  $f(z) = w$ .

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

#### Beispiele.

- 1 die lineare Funktion  $f(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ , ist injektiv.
- 2 die quadratische Funktion  $f(z) = z^2$ , ist **nicht** injektiv, denn es gilt  $f(z) = f(-z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- 3 die komplexe Exponentialfunktion  $\exp(z)$  ist **nicht** injektiv, denn es gilt  $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$ .

## Einschränkung des Definitionsbereichs.

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

**Beispiel:** Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

auf der **rechten Halbebene**  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Hier ist  $f$  injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

**Graphische Darstellung** des Urbild- und Bildbereichs auf **Folie**.

## Umkehrfunktion.

**Definition:** Sei  $f$  eine injektive Funktion mit Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$ . Dann ist die **Umkehrfunktion**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  zu  $f$  diejenige Funktion, die jedem Punkt  $w \in W(f)$  den (eindeutigen) Punkt  $z \in D(f)$  mit  $f(z) = w$  zuordnet, d.h. es gilt  $f^{-1}(w) = z$  bzw.

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z \quad \text{für alle } z \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \text{für alle } w \in W(f)$$

**Beispiel:** Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f(z) = z^2$  mit Wertebereich  $W(f) = \mathbb{C}^-$ .

Für den **Hauptwert der Wurzel**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$



## 2.5 Der komplexe Logarithmus

**Ziel:** Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

**Beachte:** Die Exponentialfunktion  $\exp(z)$  ist für **alle**  $z \in \mathbb{C}$  erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den Definitions- und Wertebereich.

**Aber:** Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf  $\mathbb{C}$ .

**Also:** Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion  $\exp^{-1}$  von  $\exp$  müssen wir den Definitionsbereich von  $\exp$  geeignet einschränken.

**Frage:** Sei  $z = x + iy \in W(\exp)$ . Welche Werte  $w = u + iv$  kommen in Frage, so dass gilt

$$e^w = z?$$



## Konstruktion des komplexen Logarithmus.

**Ausgangspunkt:** Für  $z = x + iy \in W(\exp)$  soll gelten

$$e^w = z \quad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit  $u = \ln(|z|)$ , wobei  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der **reelle** Logarithmus ist.

Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit  $v = \arg(z) + 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

Daher besteht die Menge der Lösungen von  $e^w = z$  aus den komplexen Zahlen

$$w = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{mit einem } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Menge der Lösungen von  $e^w = z$  heißt **komplexer Logarithmus** von  $z$ .



## Beispiele.

Die Funktion  $\text{Log}(z)$  bezeichnet den komplexen Logarithmus von  $z$ .

**Beispiel 1:** Wie sieht die Menge  $\text{Log}(-1)$  aus? Zunächst gilt  $\ln(|-1|) = \ln(1) = 0$  und das Argument von  $-1$  ist  $\arg(-1) = \pi$ . Somit gilt

$$\text{Log}(-1) = \{i(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von  $-1$ .

**Beispiel 2:** Wie sieht die Menge  $\text{Log}(-1 + i)$  aus? Zunächst gilt  $|-1 + i| = \sqrt{2}$  und weiterhin ist  $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$  das Argument von  $-1 + i$ . Somit gilt

$$\text{Log}(-1 + i) = \left\{ \ln(\sqrt{2}) + i \left( \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für die Werte des Logarithmus von  $-1 + i$ .

**Beispiel 3:** Für  $x > 0$  gilt  $\text{Log}(x) = \{\ln(x) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

## Der Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist  $\mathbb{C}^-$ .

Der einzige Wert von  $\text{Log}(z)$ , der zu dem Streifen  $S$  gehört, ist

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \quad \text{mit} \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert des Logarithmus** von  $z$ , kurz  $\text{Ln}(z)$ .

**Bemerkung:** Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene  $\mathbb{C}^-$  definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei  $z = 0$  ist  $\text{Ln}(z)$  nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt  $\text{Ln}(z)$  mit dem reellen Logarithmus  $\ln(x)$  überein.

## 2.6 Die Joukowski–Funktion

Die **Joukowski–Funktion**, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Problemen der Strömungsdynamik von Interesse.

**Beobachtung:** Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \quad \text{für } z \neq 0.$$

**Ziel:** Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski–Funktion.

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

die Bilder der Kreise  $|z| = \text{const.}$  und der Strahlen  $\arg(z) = \text{const.}$ .



## Geometrisches Verhalten der Joukowski–Funktion.

Für  $z = re^{i\varphi}$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2} \left( re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

und somit

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi).$$

Für das Bild des Kreises  $r \equiv r_0 > 0$  erhält man die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos(\varphi) \\ v &= \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

für den Einheitskreis  $r_0 \equiv 1$  somit  $u = \cos(\varphi)$ , für  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , und  $v \equiv 0$ , also die Strecke zwischen den Punkten  $-1$  und  $1$ , die **zweimal** durchlaufen wird.



## Geometrisches Verhalten der Joukowski–Funktion.

Für  $r_0 \neq 1$  können wir  $\varphi$  eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$$

und den Brennpunkten  $\pm 1$  bekommt.

**Fazit:** Die Joukowski–Funktion bildet eine Schar von Kreisen  $r \equiv \text{const.}$  auf eine Schar **kofokaler Ellipsen** ab. Die beiden Kreise  $r \equiv r_0$  und  $r \equiv 1/r_0$  werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet.

## Geometrisches Verhalten der Joukowski–Funktion.

Für die Bilder des Strahls  $\varphi \equiv \varphi_0$  bekommt man

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi_0) \\ v &= \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad 0 < r < \infty,$$

für die positive  $x$ -Achse  $\varphi_0 = 0$  somit

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 0 < r < \infty,$$

das Stück  $\{(u, 0) \mid 1 \leq u < \infty\}$  der  $u$ -Achse.

Analog erhalten wir für die negative  $x$ -Achse  $\varphi_0 = \pi$  das Stück  $-\infty < u < -1$ .

Die Strahlen  $\varphi_0 = \pi/2$  (positive  $y$ -Achse) und  $\varphi_0 = 3\pi/2$  (negative  $y$ -Achse) werden auf die komplette  $v$ -Achse abgebildet.

# Geometrisches Verhalten der Joukowski–Funktion.

Falls  $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ , so können wir  $r$  eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

mit den Halbachsen

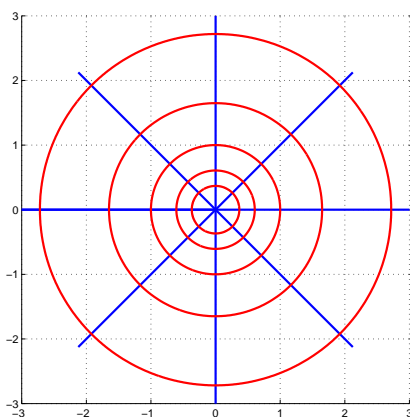
$$a = |\cos(\varphi_0)| \quad \text{und} \quad b = |\sin(\varphi_0)|$$

bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

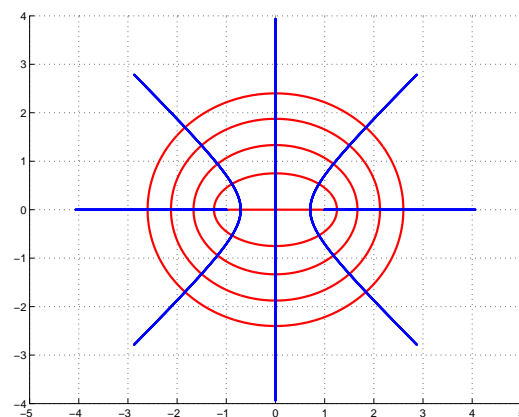
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Somit liegen die beiden Brennpunkte bei  $\pm 1$ .

# Bilder unter der Joukowski–Funktion.



**Urbild.**



**Bild der Joukowski–Funktion.**

## Weitere Bemerkungen zur Joukowski–Funktion.

- 1 Die Joukowski–Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski–Funktion ist winkeltreu.
- 2 Die Joukowski–Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **nicht** injektiv, denn für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$  gilt  $z \neq 1/z$ , aber  $f(z) = f(1/z)$ .
- 3 Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski–Funktion injektiv.
  - Auf dem **Komplement des Einheitskreises**  $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .
  - Auf der **oberen Halbebene**  $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ .
- 4 Die Umkehrfunktion  $w = f^{-1}(z)$  der Joukowski–Funktion  $f(w)$  bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach  $w$  in dem jeweiligen Definitionsbereich  $D(f)$ , somit  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ .



## Kapitel 3. Die Möbius–Transformation

### 3.1 Die stereographische Projektion

**Vorbemerkungen:** Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die **Lücken** des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von  $q(z)$ ) dadurch zu schließen, dass man  $R(z)$  dort den “Wert”  $\infty$  zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler  $p(z)$  dort verschwindet.

**Notation:** Falls  $z^* \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $q$  ist, d.h.  $q(z^*) = 0$ , und  $p(z^*) \neq 0$ , so schreibt man  $R(z^*) = \infty$ , d.h. der Wertebereich von  $R$  wird um die “Zahl”  $\infty$  erweitert.

**Definition:** In der Erweiterung  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  der komplexen Zahlenebene wird  $\infty$  als **unendlich ferner Punkt** bezeichnet.



# Erweiterung der Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$ .

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  werden zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in  $\mathbb{C}$  folgende **Rechenregeln** definiert.

$$a + \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

$$a \cdot \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$a/\infty := 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

**Warnung:** Die Verknüpfungen  $0 \cdot \infty$  und  $\infty \pm \infty$  lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

**Topologische Bedeutung:** Die erweiterte komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  ist ein **topologischer Raum**. Für eine komplexe Zahlenfolge  $\{z_n\}_n$ ,  $z_n \neq 0$ , gilt

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \iff \quad 1/z_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Der Raum  $\mathbb{C}^*$  ist **folgenkompakt**, d.h. jede Folge in  $\mathbb{C}^*$  besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird  $\mathbb{C}^*$  als **Kompaktifizierung** von  $\mathbb{C}$  bezeichnet.



# Die stereographische Projektion.

**Definition:** Die stereographische Projektion ist diejenige Abbildung  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  der **Riemannschen Zahlenkugel**

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

auf die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C}^*$ , die jedem Punkt  $x \in \mathbb{S}^2$ ,  $x \neq N = (0, 0, 1)^T$ , den Durchstoßpunkt  $P(x)$  der Geraden durch  $x$  und  $n$  durch die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene zuordnet, wobei  $P(N) := \infty$  definiert wird.

Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

$$z = P(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

**Bemerkungen:**

- 1 Die stereographische Projektion  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist bijektiv.
- 2 Die Umkehrabbildung  $P^{-1}$  von  $P$  ist gegeben durch

$$x = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$



# Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem **sphärischen Bild**  $U$  einer Menge  $B \subset \mathbb{C}^*$  verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass  $P(U) = B$ .

**Satz:** Für die stereographische Projektion gelten die folgenden Eigenschaften.

- Das sphärische Bild einer Geraden in  $\mathbb{C}^*$  ist ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der durch  $N$  geht.
- Ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der durch  $N$  geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in  $\mathbb{C}^*$  abgebildet.
- Das sphärische Bild eines Kreises in  $\mathbb{C}$  ist ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der nicht durch  $N$  geht.
- Ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der nicht durch  $N$  geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in  $\mathbb{C}$  abgebildet.
- Die stereographische Projektion ist **kreistreu**.

## Kapitel 3. Die Möbius–Transformation

### 3.2 Möbius–Transformationen

**Definition:** Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad \neq bc$$

heißt **Möbius–Transformation**.

**Bemerkung:** Für eine Möbius–Transformation  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  gilt

- Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- Es gilt  $T(-d/c) = \infty$  und  $T(\infty) = a/c$ .
- Die Abbildung  $T(z)$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung  $T^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

- Analogie zu der Inversen einer  $(2 \times 2)$ –Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$



# Komposition von Möbius-Transformationen.

**Satz:** Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist **wieder** eine Möbius-Transformation. Genauer gilt

$$\begin{aligned}w &= T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} && \text{für } ad \neq bc \\u &= (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} && \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\ &= \frac{Az + B}{Cz + D}\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $A, B, C$  und  $D$  ergeben sich aus dem **Matrixprodukt**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt wegen  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$AD - BC = (ad - bc) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$



# Kreistreue von Möbius-Transformationen.

**Satz:** Möbius-Transformationen sind **kreistreu**, d.h. (verallgemeinerte) Kreise in  $\mathbb{C}^*$  gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.

**Beweis:** Verwende eine geeignete Zerlegung für  $c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned}w_1 &= cz + d \\w_2 &= \frac{1}{w_1} \\w_3 &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot w_2\end{aligned}$$

Die Abbildungen  $w_1$  und  $w_3$  sind linear und daher **kreistreu**.



## Fortsetzung des Beweises.

**Es bleibt zu zeigen:**

Die Inversion  $w = f(z) = 1/z$  ist eine kreistreue Abbildung.

Gehe den Umweg über die stereographische Projektion, d.h. betrachte statt  $z \rightarrow 1/z$  die Abbildungsfolge

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

Dann gilt

$$x = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right)^T$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \left( \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1}, \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{i\left(\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1\right)}, \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} - 1}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1} \right)^T \end{aligned}$$

Navigationssymbole

## Komplettierung des Beweises.

Eine Vereinfachung ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, -\frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, -\frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \\ &= (x_1, -x_2, -x_3)^T \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine Abbildung  $F : S^2 \rightarrow S^2$  mit

$$F(x) = (x_1, -x_2, -x_3)^T$$

Diese Abbildung ist eine Drehung der Sphäre um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$  und offensichtlich **kreistreu**.

Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildungsfolge

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

und daher die Inversion  $z \rightarrow 1/z$  eine kreistreue Abbildung ist.

Navigationssymbole

## Bemerkungen zu Möbius-Transformationen.

**Bemerkung:** Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt  $-d/c$  werden durch  $T$  auf Geraden in der  $w$ -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der  $z$ -Ebene werden durch  $T$  in (verallgemeinerte) Kreise der  $w$ -Ebene durch den Punkt  $a/c$  abgebildet.
- Kreise, die **nicht** durch den Punkt  $-d/c$  gehen, werden durch  $T$  in Kreise abgebildet, die **nicht** durch den Punkt  $a/c$  gehen.

## Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen.

**Satz:** Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$  und  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$  jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es **genau eine** Möbius-Transformation  $w = T(z)$ , die die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt. Die interpolierende Möbius-Transformation  $T(z)$  ist gegeben durch die **Dreipunkteformel**

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

**Definition:** Den Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

nennt man das **Doppelverhältnis** der Punkte  $z_0, z_1, z_2, z_3$ .

## Beispiel.

Gesucht ist die Möbius-Transformation mit den [Interpolationsbedingungen](#)

$$\begin{array}{c|ccc} z_j & 1 & i & 0 \\ \hline w_j & i & -i & 0 \end{array}$$

Wir erhalten diese eindeutige Möbius-Transformation durch den Ansatz

$$\frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{0-1}{0-i}$$

Eine Vereinfachung ergibt

$$-\frac{w-i}{w+i} = i \frac{z-1}{z-i}$$

bzw.

$$(z-i)(w-i) = -i(z-1)(w+i)$$

und dies liefert schließlich die Darstellung

$$w = \frac{(1+i)z}{(1+i)z - 2i}$$

Navigationssymbole

## Symmetrie zum Kreis.

**Definition:** Gegeben sei ein Kreis  $C$  in  $\mathbb{C}$  mit Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Radius  $R$ . Zwei Punkte  $z, z' \in \mathbb{C}$  liegen [symmetrisch zum Kreis  \$C\$](#) , falls gilt

$$(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$$

Die Abbildung  $z \rightarrow z'$  nennt man die [Inversion am Kreis  \$C\$](#)  oder auch [Spiegelung am Kreis  \$C\$](#) .

Graphische Darstellung der Spiegelung an der Tafel!

### Bemerkungen:

- Ein Punkt  $z$  mit  $|z - z_0| \leq R$  ist stets zu einem Punkt  $z'$  mit  $|z' - z_0| \geq R$  symmetrisch.
- Gilt  $|z - z_0| = R$ , so ist  $z$  zu sich selbst symmetrisch, d.h.  $z' = z$ .
- Der Punkt  $z = z_0$  ist zu  $z' = \infty$  symmetrisch.

Navigationssymbole

# Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien.

**Definition:** Zwei Punkte  $z, z'$  nennt man **symmetrisch zu einer Geraden** in  $\mathbb{C}$ , wenn  $z'$  aus  $z$  durch Spiegelung an der Geraden entsteht.

**Satz:**

Möbius-Transformationen erhalten **Symmetrien** zu (verallgemeinerten) Kreisen.

**Genauer gilt:**

Ist  $C$  ein (verallgemeinerter) Kreis in  $\mathbb{C}^*$  und liegen  $z$  und  $z'$  symmetrisch zu  $C$ , so liegen die Bilder von  $z, z'$  unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in  $\mathbb{C}^*$ , der das Bild von  $C$  darstellt.

**Beispiel:** Gesucht ist eine Möbius-Transformation  $w = T(z)$ , die den Kreis  $|z| = 2$  auf den Kreis  $|w + 1| = 1$  abbildet mit  $T(-2) = 0$  und  $T(0) = i$ . Eine Möbius-Transformation ist eindeutig bestimmt, falls die Transformation von **drei** Punkten festgelegt ist. Wir haben aber nur

$$z_1 = -2, z_2 = 0 \quad \text{und} \quad w_1 = 0, w_2 = i$$

Uns fehlt also **ein** Punkt!



## Fortsetzung des Beispiels.

Nach dem letzten Satz erhalten Möbius-Transformationen die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen.

$$z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \infty \quad \text{ist symmetrisch zu } z_2 \text{ bzgl. des Kreises } |z| = 2$$

Daher ist  $w_3$  der zu  $w_2 = i$  symmetrische Punkt bezüglich des Kreises  $|w + 1| = 1$  und somit gegeben durch die Bedingung  $(w_2 + 1)(\overline{w_3 + 1}) = 1$ , also

$$w_3 = \frac{1}{2}(-1 + i)$$

Anwendung der **Dreipunkteformel** liefert

$$\frac{w - 0}{w - i} : \frac{w_3 - 0}{w_3 - i} = \frac{z + 2}{z - 0} : \frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

Was passiert mit dem Term

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

für  $z_3 \rightarrow \infty$ ?



## Komplettierung des Beispiels.

Was passiert mit dem Term

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

für  $z_3 \rightarrow \infty$ ?

Es gilt

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} = \frac{1 + \frac{2}{z_3}}{1 + \frac{0}{z_3}} \rightarrow 1 \quad \text{für } z_3 \rightarrow \infty$$

Wir erhalten also

$$\left( \frac{w}{w - i} \right) : \left( \frac{\frac{1}{2}(-1 + i)}{\frac{1}{2}(-1 + i) - i} \right) = \left( \frac{z + 2}{z} \right)$$

und Auflösung nach  $w$  ergibt

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}$$



## Beispiel.

Für  $b > a > 0$  betrachten wir die Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p} \quad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

Für die folgenden Auswertungen von  $T$  bekommen wir

$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0$$

$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm \varrho \quad \text{mit } |\varrho| > 1$$

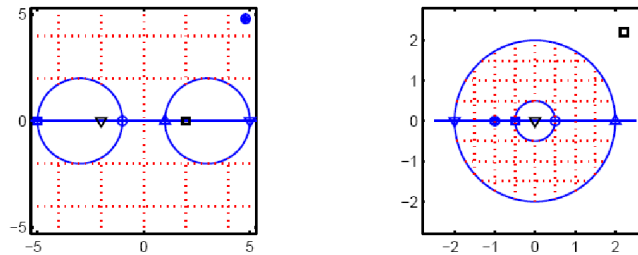
$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\varrho}$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad z_{7,8} = 1, -1.$$



## Fortsetzung des Beispiels.

- Die  $x$ -Achse wird durch  $T$  auf die  $u$ -Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur  $x$ -Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur  $u$ -Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur  $x$ -Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur  $u$ -Achse liegen.



**Relevante Anwendung:** Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet.

## Kapitel 4. Differentialrechnung im Komplexen

### 4.1 Komplexe Differentiation

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion. Dann heißt  $f(z)$  im Punkt  $z_0 \in D^0$  **komplex differenzierbar** mit Ableitung  $f'(z_0)$ , falls der folgende Grenzwert existiert,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ist  $f(z)$  in jedem Punkt eines Gebietes  $D$  komplex differenzierbar, so nennt man  $f(z)$  **holomorph**, **analytisch** oder **regulär** auf  $D$ .

#### Bemerkung:

- 1 Der Grenzwertprozess  $z \rightarrow z_0$  erfolgt in der komplexen Ebene, d.h. die Richtung der Annäherung  $z \rightarrow z_0$  ist **beliebig**.
- 2 Die oben stehende Division ist die Division **komplexer** Zahlen.

## 4.1 Komplexe Differentiation

**Lemma:** Ist  $f(z)$  reellwertig, d.h.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, und ist  $f(z)$  holomorph auf  $D$ , dann ist  $f(z)$  eine konstante Funktion.

**Beweis:** Wir betrachten zuerst die Folge  $z_n \rightarrow z_0$  gegeben durch

$$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$$

Dann ist der Differenzenquotient für alle  $n \in \mathbb{N}$  reell, denn

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R}$$

Dagegen liefert die Folge  $z_n \rightarrow z_0$  mit  $z_n = z_0 + i/n$  den rein imaginären Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{n}{i}(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{C}$$

Da aber die Funktion auf  $D$  holomorph ist, folgt

$$f'(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in D.$$



## Die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen.

**Bemerkung:** Ist die Funktion  $f(z)$  in  $z_0$  komplex differenzierbar, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

bzw. äquivalent dazu

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Sei nun  $f(z)$  im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar. Setzen wir

$$\gamma := f'(z_0),$$

so folgt nach obiger Bemerkung die äquivalente Schreibweise

$$f(z) = f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

mit  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$ .





# Die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen.

Wir verwenden nun mit  $z = x + iy$  die [Darstellungen](#)

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

Damit erhalten wir

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \operatorname{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

$$v(z) = v(z_0) + \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \operatorname{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

In [Matrixschreibweise](#) lautet dies

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

# Die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen.

Wir interpretieren jetzt  $f(z)$  als eine vektorwertige, **total differenzierbare** Funktion zweier reeller Variablen, d.h.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit der [Jakobi-Matrix](#)

$$Jf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

**Satz:** Die Funktion  $f(z)$  ist im Punkt  $z_0 \in D$  genau dann komplex differenzierbar, wenn  $f(z)$  als Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dort total differenzierbar ist und die [Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen](#) gelten

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

## Darstellung der komplexen Ableitung.

**Korollar:** Ist  $f(z)$  komplex differenzierbar in  $z_0 \in D$ , so folgt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$$

**Beweis:** Da  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  schreiben wir

$$f'(z_0) = \tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (\tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i(y - y_0)] \\ &= \tilde{u} \cdot (x - x_0) - \tilde{v} \cdot (y - y_0) + i(\tilde{v} \cdot (x - x_0) + \tilde{u} \cdot (y - y_0)) \end{aligned}$$

Da  $f$  in  $z_0$  total differenzierbar ist und die Cauchy–Riemannsches DGL's erfüllt sind, gilt ebenfalls

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cdot (x - x_0) - v_x \cdot (y - y_0) \\ v_x \cdot (x - x_0) + u_x \cdot (y - y_0) \end{pmatrix}$$

## Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung.

**Satz:** Ist  $f \in \mathcal{C}^2$  holomorph auf  $D$ , so gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

d.h. sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von  $f$  erfüllen die Laplacegleichung.

**Beweis:** Ist  $f(z)$  holomorph, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \Delta v &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Es gilt auch die folgende **Umkehrung**: Erfüllt  $u = u(x, y)$  auf einem zusammenhängenden Gebiet die Laplacegleichung  $\Delta u = 0$ , so existiert eine differenzierbare Funktion  $v = v(x, y)$ , sodass  $f(z) = u(z) + iv(z)$  auf  $D$  holomorph ist.

## Beweis der Umkehrung.

Sei  $u = u(x, y)$  mit  $\Delta u = 0$  gegeben. Gesucht ist eine Funktion  $v = v(x, y)$ , sodass die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt sind, also

$$v_x = -u_y \quad v_y = u_x$$

Aus den C.R. DGL's folgt

$$\text{grad } v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$$

Wir suchen also ein Potential  $v$  mit  $\text{grad } v = V$ . Unter der [Integrabilitätsbedingung](#)

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert.

Nun gilt aber

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

## Differentiationsregeln.

- Es gelten die folgenden Regeln:

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

- [Kettenregel](#): Ist  $f(z)$  differenzierbar in  $z_0$  und  $g(w)$  differenzierbar in  $w_0 = f(z_0)$ , so folgt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

- [Ableitung der Umkehrfunktion](#): Ist  $f(z)$  holomorph und  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f(z_0)$  um  $z_0$  lokal bijektiv und es gilt

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0)$$

# Die modifizierte Kettenregel.

**Lemma:** Ist  $f(z)$  holomorph auf  $D$  und ist  $c : [a, b] \rightarrow D$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $D$ , so gilt

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$$

**Beweis:** Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(c(t)) &= \frac{d}{dt}u(c(t)) + i \frac{d}{dt}v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i(v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2)\end{aligned}$$

Daneben haben wir

$$\begin{aligned}f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i(v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2)\end{aligned}$$

Beide Terme sind wegen der C.R. DGL's identisch.

# Beispiele.

## Beispiel 1:

Für  $f(z) = z$  erhalten wir wegen  $u(x, y) = x$  und  $v(x, y) = y$

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 1$$

Daraus folgt, dass komplexe Polynome auf  $\mathbb{C}$  holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^n a_k z^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}$$

**Explizite Berechnung** für  $f(z) = z^2$ : mit

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

berechnet man

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 2x + i 2y = 2z$$

## Beispiele.

**Beispiel 2:** Rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ komplexe Polynome}$$

sind an allen Stellen mit  $q(z) \neq 0$  komplex differenzierbar.

**Beispiel 3:** Die Exponentialfunktion  $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  ist komplex differenzierbar mit  $f'(z) = e^z$ , denn mit

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

sind die C.R. DGL's erfüllt

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

und es gilt

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$



## Weitere Beispiele.

**Beispiel 4:** Die trigonometrischen Funktionen

$$\sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

sind nach Beispiel 3 holomorph auf  $\mathbb{C}$  und es gelten den reellen Funktionen analoge Formeln.

**Beispiel 5:** Durch komplexe Potenzreihen erklärte Funktionen,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

sind auf ihrem Konvergenzbereich  $K_r(z_0)$  holomorph mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

und damit auf  $K_r(z_0)$  gleichzeitig **beliebig oft** komplex differenzierbar.



## 4.2 Konforme Abbildungen

**Satz:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$ . Dann gilt lokal an einem Punkt  $z_0 \in D$ :

- Winkel** zwischen sich im Punkt  $z_0$  schneidender Kurven bleiben bei der Transformation  $w = f(z)$ , einschließlich des Umlaufsinnns, erhalten,
- der Term  $|f'(z_0)|$  ist die für alle von  $z_0$  ausgehenden Richtungen gemeinsame **Längenverzerrung**. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man **konforme Abbildungen**.

Für konforme Abbildungen gilt die folgende **Umkehrung** des Satzes.

**Satz:** Ist  $w = f(z)$  eine konforme Abbildung und als Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so ist  $f(z)$  komplex differenzierbar und es gilt  $f'(z) \neq 0$ .

## Beweis des ersten Satzes.

Seien  $c$  und  $d$  zwei Kurven, die für  $t = 0$  durch den Punkt  $z_0$  laufen. Die beiden Tangentialvektoren in diesem Punkt sind dann  $\dot{c}(0)$  und  $\dot{d}(0)$  und für den Winkel  $\gamma$  zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$\gamma = \angle(\dot{c}(0), \dot{d}(0)) = \arg(\dot{d}(0)) - \arg(\dot{c}(0))$$

Mittels  $f$  erhalten wir die beiden Kurven  $f \circ c$  und  $f \circ d$  im Bildraum. Der Winkel  $\tilde{\gamma}$  zwischen den beiden Kurven im Punkt  $f(z_0)$  im Bildraum lautet

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle(f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{d}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)\dot{c}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{c}(0)) = \gamma\end{aligned}$$

und bezüglich der Längenverzerrung berechnet man

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ c) \right\| = |f'(z_0)\dot{c}(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{c}(0)|$$

## Konforme Transformationen.

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow D'$  eine bijektive und konforme Abbildung zwischen den beiden Gebieten  $D \subset \mathbb{C}$  und  $D' \subset \mathbb{C}$ . Weiterhin sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige zweimal stetig differenzierbare Funktion auf  $D$ . Dann nennt man die Funktion  $\Psi : D' \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$

die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$ .

**Physikalische Anwendungen:** Ist  $\Phi(z)$  eine gesuchte Potentialfunktion definiert in der **physikalischen Ebene**  $D$ , so ist  $\Psi$  die entsprechende Funktion in der **Modellebene**  $D'$ .

Im folgenden sind  $\Phi$  und  $\Psi$  also **Potentiale**, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.

Dabei sind die Vektoren  $(\Phi_x, \Phi_y)$  und  $(\Psi_u, \Psi_v)$  von besonderem Interesse.



## Der komplexe Gradient.

**Definition:** Für eine reellwertige Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  nennt man für  $z = x + iy$  den Ausdruck

$$\text{grad } \Phi(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

den **komplexen Gradienten** von  $\Phi(z)$ .

**Satz:** Sei  $\Psi$  die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$ . Dann gelten die beiden Beziehungen

$$\text{grad}_z \Phi(z) = \text{grad}_w \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

$$\Delta_z \Phi(z) = \Delta_w \Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$$

**Beweis:** Nach Definition ist die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$  gegeben durch

$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$



## Fortsetzung des Beweises.

Daraus folgt aber  $\Phi = \Psi \circ f$  und mit  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$$

Wir berechnen nun

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x$$

$$\Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y$$

Für den **komplexen Gradienten** gilt dann wegen  $f'(z) = u_x + i v_x$

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi(z) &= (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u(u_x + i u_y) + \Psi_v(v_x + i v_y) \\ &\stackrel{\text{C.R.}}{=} \Psi_u(u_x - i v_x) + i \Psi_v(u_x - i v_x) \\ &= \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)} \end{aligned}$$



## Komplettierung des Beweises.

Die Berechnung der **zweiten Ableitungen** ergibt

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu} u_x^2 + 2\Psi_{uv} u_x v_x + \Psi_{vv} v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu} u_y^2 + 2\Psi_{uv} u_y v_y + \Psi_{vv} v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Psi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\Psi_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) \\ &\quad + \Psi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \Psi_u \Delta u + \Psi_v \Delta v \end{aligned}$$

Wir verwenden nun wieder die C.R. DGL's und erhalten

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0$$

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

und damit das gewünschte Resultat

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2$$





## Zur praktischen Anwendung konformer Transformationen.

**Korollar:** Bei konformen Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.

**Anwendung konformer Transformationen:** Gegeben sei das **Dirichlet-Problem** für die Laplacegleichung, d.h. die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = g & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein **„kompliziertes“** zweidimensionales Gebiet sei.

Mit Hilfe einer geeigneten **konformen Transformation** läßt sich das Problem nach folgender Vorgehensweise sogar explizit lösen.

- 1 suche eine konforme Transformation, die das physikalische Gebiet  $D$  auf das **„einfache“** Modellgebiet  $D'$  transformiert;
- 2 transformiere die Randbedingungen auf  $\partial D$  zu Randbedingungen auf  $\partial D'$  und löse das Dirichlet-Problem auf  $D'$ ;
- 3 transformiere die Lösung zurück auf das physikalische Gebiet  $D$ .



## Ein Anwendungsbeispiel: Ebene Potentialströmungen.

Wir wollen das Geschwindigkeitsfeld einer **stationären, wirbel- und quellenfreien Umströmung eines Zylinders** berechnen. Sei dazu  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das gesuchte Geschwindigkeitsfeld.

Dann gelten die Gleichungen

$$\text{rot } w = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0$$

$$\text{div } w = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0$$

Ist  $D \subset \mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend, so folgt aus der ersten Bedingung

**es existiert** eine Funktion  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla u = -w$

und aus der zweiten Bedingung

**es existiert** eine Funktion  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla v = (w_2, -w_1)^T$



# Das komplexe Strömungspotential.

Man nennt

- die Funktion  $u$  das **Geschwindigkeitspotential**;
- die Funktion  $v$  die **Stromfunktion**.

Die zur Stromfunktion gehörenden **Stromlinien** sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung  $y'(x) = w_2/w_1$  und gegeben durch

$$v(x, y) = \text{const.}$$

**Definition:** Die komplexe Funktion  $\Phi = \Phi(x, y)$  definiert durch

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

nennt man **komplexes Strömungspotential**.

Das komplexe Strömungspotential  $\Phi(z)$  ist eine holomorphe Funktion, denn es gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x - v_y = -w_1 - (-w_1) = 0$$

$$u_y + v_x = -w_2 + w_2 = 0$$



# Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Das Geschwindigkeitsfeld  $w$  läßt sich direkt berechnen: wegen

$$\Phi'(z) = u_x + i v_x = -w_1 + i w_2$$

folgt

$$w = w_1 + i w_2 = -\overline{\Phi'(z)}$$

Unser **physikalisches Gebiet** ist gegeben durch  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  und das entsprechende **Modellgebiet** ist

$$D' = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \neq 0 \text{ und } |\text{Re } z| > 1\}$$

Die Joukowski–Funktion  $f(z)$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

ist eine **konforme Transformation** von  $D$  auf  $D'$ .



## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

In der **Modellebene** können wir annehmen, dass ein homogenes Geschwindigkeitsfeld vorliegt, d.h. in  $D'$  gilt

$$W = \text{const.} = (V_\infty, 0)^T$$

da eine unendlich dünne Platte eine gegebene homogene Strömung in Richtung der reellen Achse und Geschwindigkeit  $V_\infty$  nicht beeinflusst.

Für das **Geschwindigkeitspotential**  $U(W)$  gilt dann die Gleichung

$$\text{grad } U(W) = -(V_\infty, 0)^T$$

und daraus folgt

$$U(w) = -V_\infty W_1$$

Entsprechend ergibt sich für die **Stromfunktion**  $V(W)$

$$\text{grad } V(W) = (0, -V_\infty)^T \quad \Rightarrow \quad V(w) = -V_\infty W_2$$

## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

In der **physikalischen Ebene** können wir annehmen, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{grad } \Phi(z) = -v_\infty$$

gilt, d.h. im Unendlichen spürt die ungestörte Strömung kein Hindernis.

Wegen der Beziehung

$$\text{grad } \Phi(z) = \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

folgt mit

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right)$$

die Beziehung  $V_\infty = 2Rv_\infty$ .

Für das **komplexe Strömungspotential** gilt dann

$$\Psi(W) = -2Rv_\infty (\text{Re } W + i \text{Im } W)$$

## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Wir betrachten nun die **Rücktransformation** in die physikalische Ebene, d.h.

$$\Phi(z) = (\Psi \circ f)(z) = -2Rv_\infty(\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z))$$

Für die Joukowski-Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

gilt offensichtlich

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} + \frac{Rx}{x^2 + y^2} \right) \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{R} - \frac{Ry}{x^2 + y^2} \right)$$

Damit ergibt sich in der physikalischen Ebene das **Geschwindigkeitspotential**  $u(z)$

$$u(z) = u(x, y) = -v_\infty \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Entsprechend ergibt sich für die **Stromfunktion**

$$v(z) = v(x, y) = -v_\infty \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

Das **Geschwindigkeitsfeld**  $w$  um den Zylinder ist dann gegeben durch

$$w = -\nabla u = -v_\infty \left( \frac{(x^2 + y^2)^2 - R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Insbesondere gilt:

- In den beiden **Staupunkten**  $(-R, 0)$  und  $(R, 0)$  ist die Geschwindigkeit gleich Null,

$$w(-R, 0) = w(R, 0) = (0, 0)^T$$

- Die Geschwindigkeit ist **maximal** in den beiden Punkten  $(0, -R)$  und  $(0, R)$  mit

$$w_{\max} = 2v_\infty$$

# Kapitel 5. Komplexe Integration

## 5.1 Beispiele zur komplexen Integration

**Definition:** Eine komplexwertige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  einer reellen Variablen ist **integrierbar**, falls der Real- und Imaginärteil von  $f$  integrierbar sind, und es gilt:

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$$

Es gelten zu dem Reellen analoge Eigenschaften, wie zum Beispiel **Linearität**. Weiter gilt stets

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Beweis:** Man berechnet

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\varphi} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$



## Komplexe Integration analog zu Kurvenintegralen.

**Reelle Analysis:** Sei  $c : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  ein stückweiser  $\mathcal{C}^1$ -Weg,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann hatten wir in Analysis II und III die beiden Kurvenintegrale 1. und 2. Art

$$\int_c f(x) ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}\| dt$$

bzw.

$$\int_c F(x) dx := \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt$$

**Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $c : [a, b] \rightarrow D$  ein stückweiser  $\mathcal{C}^1$ -Weg. Dann ist

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

das **komplexe Integral** von  $f(z)$  längs der Kurve  $c$ .



# Eigenschaften des komplexen Integrals.

- Der Wert des komplexen Integrals ist **unabhängig** von der Parametrisierung der Kurve.
- Bei Änderung der **Durchlaufrichtung** gilt

$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

Hier ist  $(-c)(t) := c(b + t(a - b))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

- **Linearität**

$$\int_c (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- **Additivität** bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{c_1+c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$



## Weitere Eigenschaft des komplexen Integrals

Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \text{Bild}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)| dt}_{\text{Bogenlänge } L(c)}$$

**Beweis** Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} \left| \int_c f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \end{aligned}$$



## Ein Beispiel für komplexe Integrale.

### Beispiel 1:

Sei  $f(z) = z$  und  $c(t) = re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\oint_c z \, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it}) \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt + i r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt \\ &= 0\end{aligned}$$

## Weitere Beispiele zu komplexen Integralen.

### Beispiel 2:

Sei  $f(z) = \bar{z}$  und  $c(t) = re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\oint_c \bar{z} \, dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot (rie^{it}) \, dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i$$

### Beispiel 3:

Sei  $f(z) = 1/z$  und  $c(t) = re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\oint_c \frac{1}{z} \, dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2} \, dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z} \, dz = 2\pi i$$

**Beispiel 4:** Es gilt mit  $c(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  die Beziehung

$$\oint_c (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{für } n = -1 \\ 0 & : \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

## Fortsetzung des letzten Beispiels.

### Beispiel 4:

$$\begin{aligned}\oint_c (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (rie^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left( - \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & : \text{für } n = -1 \\ 0 & : \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}\end{aligned}$$

Nur für  $n = -1$  verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_c \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Frage: Woran liegt das?



## Gleichmäßige Konvergenz bei komplexen Integralen.

**Satz:** Ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  eine Reihe stetiger Funktionen, die auf dem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  **gleichmäßig konvergiert**, und ist  $c : [a, b] \rightarrow D$  ein stückweiser  $\mathcal{C}^1$ -Weg, so gilt

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c f_k(z) dz$$

**Beweis:** Da die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion  $f(z)$  stetig und daher auch integrierbar und

$$\int_c f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_c f_k(z) dz = \int_c R_n(z) dz$$

**Gleichmäßige Konvergenz** bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N, z \in D : |R_n(z)| < \varepsilon$$





## Fortsetzung des Beweises.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c R_n(z) dz = 0$$

**Beispiel:** Sei

$$c(t) = re^{it} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

und  $|z_0| > r$ . Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

**Beachte:** Der Punkt  $z_0$  liegt außerhalb des Kreises  $c(t)$ .

## Fortsetzung des letzten Beispiels.

Man berechnet direkt unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz$$

denn es gilt

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k dz = 0$$

da man Integration und Summation vertauschen kann.

# Vorgriff auf die Laurent-Reihe.

**Beispiel:** Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{analog zur Taylor-Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{negative Potenzen}}$$

nennt man eine **Laurent-Reihe**.

Sie konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in einem **Kreisring**

$$0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2$$

Für  $R_1 < r < R_2$  und  $c(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  gilt daher

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}$$



## Kapitel 5. Komplexe Integration

### 5.2 Der Cauchysche Hauptsatz

Wir hatten im Abschnitt 5.1 mit der Kurve  $c(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{für } n = -1 \\ 0 & : \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

**Frage:** Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

**Satz:** (Cauchyscher Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie)

Ist  $G \subset \mathbb{C}$  ein **einfach zusammenhängendes** Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine **holomorphe** Funktion und  $c : [a, b] \rightarrow G$  eine **geschlossene** stückweise  $C^1$ -Kurve, so gilt stets

$$\oint_c f(z) dz = 0$$



## Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz.

Alle drei Voraussetzungen sind wichtig und zusammen hinreichend

- ① Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist **nicht** holomorph und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz \neq 0$$

- ② Das Gebiet  $G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$  ist **nicht** einfach zusammenhängend und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \neq 0$$

- ③ Die Kurve  $c(t) = e^{(1+i)t}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$  ist **nicht** geschlossen und es gilt

$$\int_c z dz \neq 0$$

## Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

**Beweis:** Wir setzen  $c(t) = (x(t), y(t))^T$  und  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \oint_c f(z) dz &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x}) dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} dx + i \oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

Bei beiden Vektorfelder  $(u, -v)^T$  und  $(v, u)^T$  ist wegen der C.R. DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\text{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \text{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve**  $c$  identisch gleich Null.

# Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion.

**Korollar:** Ist  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $f(z)$  holomorph auf  $G$  und  $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow G$ , so folgt aus  $c_1(a) = c_2(a)$  und  $c_1(b) = c_2(b)$  direkt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz$$

d.h. das Integral  $\int_c f(z) dz$  ist **wegunabhängig**.

## Satz: (Existenz einer Stammfunktion)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  holomorph auf  $G$ ,  $z_0 \in G$  ein fester Punkt und setze für  $z \in G$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi) d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die  $z_0$  und  $z$  verbindet. Dann ist  $F(z)$  eine **Stammfunktion** von  $f(z)$ , d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z)$$



# Beweis des letzten Satzes.

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) dt \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0$ .



# Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion.

**Korollar:** Ist  $f(z)$  auf einem **einfach zusammenhängenden** Gebiet  $G$  **holomorph** und  $F(z)$  eine **Stammfunktion** von  $f(z)$ , so gilt für alle stückweisen  $C^1$ -Kurven  $c : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

**Beispiel:** Wir betrachten mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$  das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2}$$

Die Funktion  $f(z) = 1/z^2$  ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

also die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.

Insbesondere ist das obenstehende Integral **wegunabhängig**.



## Fortsetzung des Beispiels.

**Direkte Integration:** Wir setzen den Integrationsweg

$$c(t) = a + it, \quad \text{für } -b \leq t \leq b$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z^2} &= \int_{-b}^b \frac{i}{(a + it)^2} dt = - \frac{1}{a + it} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{1}{a - ib} - \frac{1}{a + ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite berechnet man mit Hilfe der **Stammfunktion**

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2} = \left( -\frac{1}{z} \right) \Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$



# Homotope Kurven.

**Definition:** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow G$  zwei geschlossene Kurven in  $G$ . Man nennt  $c$  und  $\tilde{c}$  **homotop**, falls eine stetige Abbildung  $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$  existiert mit

$$\Phi(t, 0) = c(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(t, 1) = \tilde{c}(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(a, s) = \Phi(b, s) \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

Eine geschlossene Kurve  $c$  heißt **nullhomotop**, falls sie sich in  $G$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Damit folgt aus dem **Cauchyschen Integralsatz**:

Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ . Dann gilt für zwei geschlossene Wege  $c$  und  $\tilde{c}$ :

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \Rightarrow \oint_c f(z) dz = \oint_{\tilde{c}} f(z) dz$$



# Beispiel und Definition der Umlaufzahl.

**Beispiel:** Für jede einfach geschlossene Kurve  $c$ , die den Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Denn  $c(t)$  ist homotop zu  $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Definition:** Für eine geschlossene, stückweise  $C^1$ -Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  heißt

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von  $c$  bezüglich des Punktes  $z_0$ .

Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg  $c$  den Punkt  $z_0$  in mathematisch positivem Sinne umläuft.



## 5.3 Die Cauchysche Integralformel, Taylor-Entwicklung

### Satz: (Cauchysche Integralformel)

Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ ,  $z_0 \in G$  und  $c : [a, b] \rightarrow G \setminus \{z_0\}$  ein zum Punkt  $z_0$  homotoper Weg, der  $z_0$  im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

### Beweis:

Der Weg  $c$  läßt sich innerhalb von  $G \setminus \{z_0\}$  auf einen Kreis  $K_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

## Fortsetzung des Beweises.

Daher gilt

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $r \rightarrow 0$  erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \longrightarrow 2\pi if(z_0)$$

Da das Integral  $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  aber unabhängig von  $r$  ist, folgt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi if(z_0)$$





# Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

## Korollar 1: (Mittelwerteigenschaft)

Ist  $f(z)$  holomorph auf dem Gebiet  $G$ , so gilt für  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$  die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

## Korollar 2: (Maximumprinzip)

- 1) Ist  $f(z)$  holomorph auf  $G$  und besitzt  $|f(z)|$  sein Maximum in  $z_0 \in G$ , dann ist  $f(z)$  eine konstante Funktion.
- 2) Ist  $f(z)$  stetig auf  $\overline{G}$  und holomorph auf  $G$ , so nimmt  $|f(z)|$  sein Maximum stets auf dem Rand  $\partial G$  an.

## Korollar 3: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$  und  $a_n \neq 0$ , so besitzt  $p(z)$  wenigstens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

# Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Wir nehmen an, dass das Polynom keine Nullstelle besitzt. Dann ist die Funktion  $f(z) := 1/p(z)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $z \rightarrow \infty$  erhalten wir also  $|f(z)| \rightarrow 0$ .

Daher muss  $|f(z)|$  in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  das Maximum annehmen und nach dem [Maximumprinzip](#) folgt  $f(z) = \text{const.}$

Demnach ist auch  $p(z) = \text{const.} =: \alpha$ , aber dann gilt

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = \alpha$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich  $a_n = 0$ , also einen [Widerspruch](#).

## Taylor–Entwicklung komplexer Funktionen.

**Satz:** Ist  $f(z)$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in G$ , so ist  $f(z)$  in jedem Kreis  $K_r(z_0) \subset G$  in eine **Potenzreihe** entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } |z - z_0| < r.$$

Den Punkt  $z_0$  nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Insbesondere ist  $f(z)$  auf  $G$  beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Die **Koeffizienten**  $a_k$  der Potenzreihe sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Für den **Konvergenzradius**  $R$  der Taylor–Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0 : K_r(z_0) \subset G\}$$



## Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

**Satz:** Analog zur Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

gilt für die **Ableitungen** von  $f(z)$  die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

**Beweis:** Nach der **Cauchyschen Integralformel** gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta$$

wobei der Kreis  $|\zeta - z_0| = r$  **einmal** im positiven Sinn durchlaufen wird.



## Fortsetzung des Beweises.

Liegt nun  $z$  **innerhalb** dieses Kreises, d.h.  $|z - z_0| < r$ , so folgt ebenfalls

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der **geometrischen Reihe**

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$



## Fortsetzung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k$$

und damit kann die Integralformel in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k d\zeta$$

geschrieben werden.

Da die Potenzreihe **gleichmäßig** konvergiert, kann man Summation und Integration **vertauschen**.



## Komplettierung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

und ein **Koeffizientenvergleich** in der Potenzreihe ergibt

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

## Die Cauchysche Ungleichung.

**Satz:** Sei  $f(z)$  holomorph auf  $G$ ,  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ . Für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von  $f(z)$  um  $z_0$  gilt dann die **Abschätzung**

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

**Beweis:** Aus der **verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

folgt direkt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z - z_0| = r} \left( \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} \right) \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot M(r) \end{aligned}$$

# Der Satz von Liouville.

**Satz:** Ist  $f(z)$  holomorph und beschränkt auf  $\mathbb{C}$ , so ist  $f(z)$  konstant.

**Beweis:** Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert  $r \rightarrow \infty$

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \geq 1$$

Damit ist auch  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $f(z) = \text{const.}$

## Kapitel 5. Komplexe Integration

### 5.4 Singularitäten und Residuen

**Satz:** (Laurent-Entwicklung)

Sei  $f(z)$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq R_1 < R_2$  mit

$$K_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subset G$$

Dann ist  $f(z)$  auf  $K_{R_1, R_2}(z_0)$  in eine Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für die Koeffizienten gilt mit  $R_1 < \rho < R_2$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

# Die Laurent-Entwicklung.

**Weiterhin gilt:** Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes  $K_{r,R}(z_0)$ , der noch innerhalb von  $G$  liegt, in jedem kleineren **kompakten** Kreisring  $K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$  ist die Konvergenz **absolut** und **gleichmäßig**.

**Beweis des Satzes:** Gegeben sei ein Kreisring  $K_{r,R}(z_0) \subset G$  mit  $R_1 < r < R < R_2$  und den beiden Rändern

$$c_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c_R(t) := z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

**Behauptung:** Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt  $z \in K_{r,R}(z_0)$  die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



## Fortsetzung des Beweises.

Seien dazu die beiden Kurven  $c_1$  und  $c_2$  definiert wie an der **Tafel** angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0 \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale entlang  $c_R$  und  $c_r$  eine **Reihendarstellung** herzuleiten.

Sei zunächst  $\zeta$  ein Punkt auf  $c_R$ , also  $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k \end{aligned}$$



## Fortsetzung des Beweises.

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Sei nun  $\zeta$  ein Punkt auf  $c_r$ , d.h.  $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \quad \text{mit } m = -(k + 1) \end{aligned}$$



## Fortsetzung des Beweises.

Einsetzen in das Kurvenintegral über  $c_r$  ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \leq |z - z_0| \leq R$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

gegeben sind.



## Komplettierung des Beweises.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges  $\rho \in [r, R]$ .

### Bemerkung:

- Die Laurent-Entwicklung von  $f(z)$  ist bei vorgegebenem Kreisring eindeutig bestimmt.
- Ist  $f(z)$  holomorph im gesamten Kreis  $\overline{K_{R_2}(z_0)}$ , so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für  $k = -1, -2, -3, \dots$  die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die Laurent-Entwicklung stimmt dann mit der Taylor-Entwicklung überein.



## Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  und Kreisring  $0 < |z| < \infty$ .

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erhalten wir die Laurent-Reihe

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$





## Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ . Der Nenner hat **zwei Nullstellen** in  $z = -1$  und  $z = 2$ . Es existieren daher **drei Laurent-Entwicklungen**, nämlich in  $|z| < 1$ , in  $1 < |z| < 2$ , und in  $|z| > 2$ .

Für den Kreisring  $1 < |z| < 2$  gilt etwa:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{3} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k \end{aligned}$$



## Isolierte Singularitäten.

**Definition:** Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ . Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt **isolierte Singularität** von  $f(z)$ , falls ein  $r > 0$  existiert mit  $K_{0,r}(z_0) \subset G$ .

Ist  $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$  die Laurent-Entwicklung in  $K_{0,r}(z_0)$ , so nennt man den Punkt  $z_0$

- 1) eine **hebbare Singularität**, falls  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$  gilt,
- 2) einen **Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$** , falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall k < -m : a_k = 0$$

- 3) eine **wesentliche Singularität**, falls  $a_k \neq 0$  für unendlich viele  $k < 0$  gilt.



## Einige Beispiele.

- ① Der Punkt  $z_0 = 0$  ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor-Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

- ② Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat in  $z_0 = 0$  einen Pol der Ordnung 1.

- ③ Die Funktion  $f(z) = e^{1/z}$  hat in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$



## Ein weiteres Beispiel: Rationale Funktionen.

Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von  $q(x)$ . Ist nun  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q(z)$ , so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z), \quad r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei  $g$  holomorph in  $z_0$  ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h.  $z_0$  ist ein **Pol** der Ordnung  $\leq m$  oder eine **hebbare Singularität**, falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ .



# Klassifikation von Singularitäten.

## Satz:

- a) Ist  $z_0$  eine **hebbare** Singularität, so existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ . Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & : z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von  $f(z)$ .

- b) Ist  $f(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  **beschränkt**, so ist  $z_0$  eine hebbare Singularität.
- c) Ist  $z_0$  ein **Pol** von  $f(z)$ , so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

- d) Ist  $z_0$  eine **wesentliche** Singularität von  $f(z)$ , so bildet  $f(z)$  jeden Kreisring  $K_{0,\varepsilon}(z_0)$  auf  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  ab.

## Kapitel 5. Komplexe Integration

### 5.5 Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

**Definition:** Besitzt die Funktion  $f(z)$  bei  $z_0$  die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) := \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von  $f(z)$  zum Entwicklungspunkt  $z_0$ .

**Satz:** Ist  $r(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind  $z_1, \dots, z_m$  die (verschiedenen) Nullstellen von  $q(z)$ , so gilt

$$r(z) = h(z; z_1) + \dots + h(z; z_m)$$

## Beweis des letzten Satzes.

**Idee:** Wir zeigen, dass die Funktion  $g(z)$  definiert durch

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j)$$

beschränkt und auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass  $g(z)$  konstant ist. Mit  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ , folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist  $g(z)$  holomorph auf dem Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$  und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten  $z_1, \dots, z_m$  verschwinden identisch.

Demnach sind die Punkte  $z_1, \dots, z_m$  hebbare Singularitäten und  $g(z)$  ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen  $\text{grad } p < \text{grad } q$  folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$$



## Fortsetzung des Beweises.

Also ist  $g(z)$  beschränkt und holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const}$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für  $z \rightarrow \infty$  folgt

$$g(z) = 0$$

**Anwendung des Satzes:** Die Partialbruchzerlegung einer komplexen rationalen Funktion kann über die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die Singularitäten der rationalen Funktion sind.



## Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung.

Man bestimme die **Partialbruchzerlegung** der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)}$$

Der Nenner besitzt die beiden **Nullstellen**  $z = -1$  und  $z = 1$ . Wir bestimmen daher die **Hauptteile** der Laurent-Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für  $z = -1$  schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)}$$

Nun ist  $g(z)$  in einer Umgebung des Punktes  $z = -1$  **holomorph** und kann in eine **Taylor-Reihe** entwickelt werden. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot (-2 - (z+1) + O((z+1)^2))$$



## Fortsetzung des Beispiels.

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z;-1)} + \dots$$

2) Analog schreiben wir für den Punkt  $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)}$$

und erhalten durch **Taylor-Entwicklung**

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot (1 - (z-1) + O((z-1)^2)) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z;-1)} - 1 + \dots$$

Demnach ist die **komplexe Partialbruchzerlegung** von  $f(z)$  gegeben durch

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$$



# Der Residuensatz.

**Definition:** Ist  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f(z)$ , so besitzt  $f(z)$  eine Laurent-Entwicklung zum Punkt  $z_0$ , d.h.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r$$

Man nennt dann

$$\text{Res}(f; z_0) := a_{-1}$$

das **Residuum** von  $f(z)$  in  $z_0$ .

**Satz:** Sei  $G$  ein Gebiet,  $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph,  $c$  eine geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ , die in  $G$  nullhomotop ist, d.h. innerhalb von  $c$  liegen höchstens die isolierten Singularitäten  $z_1, \dots, z_m$ . Dann gilt

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \cdot \text{Res}(f; z_k)$$



## Beweisskizze zum Residuensatz.

- 1) Zunächst genügt es, nur die Singularitäten zu betrachten, die **innerhalb** von  $c$  liegen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.
- 2) Man zerlegt  $c$  in geschlossene Kurven  $c_1, \dots, c_s$ , sodass jede dieser Kurven  $c_j$  nur **Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl**  $l_j$  enthält.
- 3) Jede Kurve  $c_j$  ist innerhalb von  $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$  homotop zu einer  **$l_j$ -fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve**  $\tilde{c}_j$ . Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{j=1}^s \oint_{c_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^s l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z) dz$$

- 4) Jeder **einfach geschlossene Weg**  $\tilde{c}_j$  kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von  $\tilde{c}_j$  zerlegt werden. Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz$$



## Fortsetzung der Beweisskizze zum Residuensatz.

Mit der **Laurent-Entwicklung** um  $z_k$  gilt aber

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz &= \oint_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j dz \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j dz \\ &= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_k)\end{aligned}$$

Für die Kurve an der **Tafel** erhält man also

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= 2\pi i \cdot [2\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2) \\ &\quad + \text{Res}(f; z_3) + 2\text{Res}(f; z_4) + 2\text{Res}(f; z_5)]\end{aligned}$$

## Methoden zur Berechnung von Residuen.

**Satz:**

- a) Ist  $z_0$  ein **einfacher Pol** von  $f(z)$ , so besitzt  $f(z)$  eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in  $z_0$  holomorphen Funktion  $g(z)$ . Für das Residuum gilt dann

$$\text{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

- b) Ist  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit auch in  $z_0$  holomorphen Funktionen  $p$  und  $q$  eine rationale Funktion und  $z_0$  eine **einfache Nullstelle** von  $q(z)$ , so gilt

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- c) Gilt  $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ ,  $m \geq 1$  mit einer in einer Umgebung von  $z_0$  holomorphen Funktion  $g(z)$ , so gilt

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

## Beweis des letzten Satzes.

Wie man leicht sieht, ist Teil a) ein **Spezialfall** von Teil c).

Weiterhin kann Teil c) über eine **Taylor-Entwicklung** bewiesen werden, da  $g(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph ist.

Wir schreiben zunächst

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$$

Daraus kann man direkt das **Residuum** ablesen und es gilt

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}(f; z_0)$$

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist  $r(z)$  im Punkt  $z_0$  **holomorph fortsetzbar** mit  $r(z_0) \neq 0$ .

## Fortsetzung des Beweises.

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist  $r(z)$  im Punkt  $z_0$  holomorph fortsetzbar mit  $r(z_0) \neq 0$ .

Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei  $z = z_0$  **holomorph** und wir erhalten für  $f(z)$  die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil a) folgt wegen

$$q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$$

gerade

$$\text{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$





## 5.6 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

**Satz:** Sei  $r(x) = p(x)/q(x)$  eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf  $\mathbb{R}$  besitzt, und es gelte

$$\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$$

Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(r; z)$$

**Beweis:** Wegen  $\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$  existiert nach dem [Majorantenkriterium](#) das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für  $x \gg 1$  gilt

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{c}{x^2}$$

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve (siehe Tafel).



## Fortsetzung des Beweises.

Ist  $t$  hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten  $z_k$  von  $r(z)$  mit strikt positivem Imaginärteil [innerhalb](#) der Kurve  $c_1 + c_2$ .

Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(r; z_k) = \oint_{c_1 + c_2} r(z) dz = \int_{c_1} r(z) dz + \int_{c_2} r(z) dz$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z) dz = \int_{-t}^t r(z) dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(z) dz \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z) dz \right| \leq \max_{|z|=t} |r(z)| \cdot \pi t \leq \pi t \frac{c}{t^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.



## Beispiel.

Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Die Funktion  $r(z) = 1/(1+z^6)$  besitzt sechs **Polstellen**, von denen drei in der **oberen Halbebene** liegen, nämlich  $e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ . Ferner gilt

$$\operatorname{Res}(r; z_k) = \frac{1}{6z^5} \Big|_{z=z_k} = -\frac{z_k}{6}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i \left( -\frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$



## Beispiel.

Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx \quad \text{mit } a > 0, \omega > 0$$

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left| \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{c}{|z|^2} \quad \text{für } y \geq 0$$

entlang des Weges  $c_2$ , gilt die Aussage **analog**.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; z_k \right) = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; ia \right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{i\omega z}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a} \end{aligned}$$



## Weitere Anwendungen.

**Satz:** Sei  $f(z)$  holomorph auf  $\{z : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene  $\operatorname{Im} z > 0$ .

Gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, y \geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{iz}; z_k)$$

**Beispiel:** Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$

## Weitere Anwendungen.

**Satz:** Sei  $r(z)$  eine rationale Funktion ohne Polstellen in  $0 \leq x < \infty$  und es gelte  $\operatorname{grad} q > \operatorname{grad} p$ . Für  $0 < \alpha < 1$  gilt dann

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \operatorname{Res} \left( \frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k \right)$$

Dabei ist folgender Zweig von  $z^\alpha$  zu wählen

$$z = re^{i\phi} \quad \text{mit } 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}$$

**Beispiel:** Man berechnet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

## Wiederholung aus Analysis II: Fourier–Reihenentwicklung

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ –periodische, stückweise stetige Funktion.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(k\omega\tau) d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(k\omega\tau) d\tau$$

Reelle Darstellung der Fourier–Entwicklung von  $f$  mit  $\omega = 2\pi/T$ .

## Konvergenzsatz zur Fourier–Entwicklung.

**Satz:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ –periodisch, stückweise stetig differenzierbar und betrachte die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

Dann gilt:

- a) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

- b) In allen kompakten Intervallen  $[a, b]$ , in denen  $f(t)$  stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

### Komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad \gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau$$

# Die Fourier–Transformierte und das Fourier–Integral.

Betrachte jetzt den formalen Grenzwert  $T \rightarrow \infty$ , um eine Fourier–Entwicklung für nicht–periodische Funktionen zu erhalten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right) \Delta\omega$$

Riemannsche Summe mit  $\Delta\omega := \omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/T$ .

**Definition:** Die Funktion  $F(\omega)$  gegeben durch

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

heißt die **Fourier–Transformierte** oder **Spektralfunktion** von  $f(t)$ . Die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

nennt man das **Fourier–Integral** oder **Spektrale Zerlegung** von  $f(t)$ .



# Diskretes und kontinuierliches Sepktrum.

**Bemerkung:**

- Die Fourierkoeffizienten  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  einer periodischen Funktion  $f(t)$  bilden das **diskrete Spektrum** von  $f$ .
- Die Fourier–Transformation  $(F(\omega))_{\omega \in \mathbb{R}}$  einer nicht–periodischen Funktion liefert das **kontinuierliche Spektrum**.

**Andere Schreibweisen:**

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier–Transformation und inverse Fourier–Transformation.



# Reelle Darstellung der Fourier–Transformation.

**Bemerkung:** Durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil erhält man die **reelle Darstellung** der Fourier–Transformation

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau) \right) d\tau \\ &= a(\omega) - ib(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (\text{gerade Funktion})$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (\text{ungerade Funktion})$$

Entsprechend gilt folgende reelle Darstellung des Fourier–Integrals.



# Reelle Darstellung des Fourier–Integrals.

Dann gilt auch die folgende Darstellung des Fourier–Integrals

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) - ib(\omega)) \left( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \end{aligned}$$

**Zusammenfassung:** (Sinus–, Cosinus–Spektrum)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$



## Beispiel: Fourier–Transformierte des Rechteckimpulses.

Wir betrachten den **Rechteckimpuls** der Form

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -a \leq t \leq a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & : \omega \neq 0 \\ 2a & : \omega = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



## Fortsetzung des Beispiels.

Für die Umkehrung erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t))}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a-t))}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

Dies sind sogenannte **Dirichlet–Integrale** der Form

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

und man verwendet zur Berechnung den **Residuensatz**.





## Komplettierung des Beispiels.

Es folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} \pi & : \alpha > 0 \\ 0 & : \alpha = 0 \\ -\pi & : \alpha < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Umkehrung in der Form

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1 & : |t| < a \\ \frac{1}{2} & : t = a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$

### Bemerkung:

Man beachte insbesondere die [Mittelwerteigenschaft](#)

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$



## Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit  $a > 0$  die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned}$$

Umkehrung wieder mit Hilfe des [Residuensatzes](#)

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

und  $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$ .



## Fortsetzung des Beispiels.

Konkrete Berechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - iat} d\omega \\ &= \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z - iat}; z_k \right) \\ &= \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}\end{aligned}$$



## Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit  $a > 0$  die Funktion

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}\end{aligned}$$



# Existenz und Eindeutigkeit der Fourier–Transformierten.

## Satz:

- a) Ist  $f(t)$  stückweise stetig und absolut integrierbar, d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ , so existiert die Fourier–Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ . Das Integral konvergiert gleichmäßig und  $F(\omega)$  ist stetig.

- b) Ist  $f(t)$  eine stückweise  $C^1$ –Funktion und absolut integrierbar, so gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \left( f(t^-) + f(t^+) \right) = \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} d\omega$$

- c) Sind  $f_1, f_2$  wie in b) mit  $F_1(\omega) = F_2(\omega)$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ , so folgt  $f_1(t) = f_2(t)$  in allen Punkten  $t$ , in denen  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind.



# Rechenregeln der Fourier–Transformation.

Im Folgenden seien  $f, g, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und absolut integrierbar. Mit  $F(\omega), G(\omega), \dots$  bezeichnen wir die entsprechenden Fourier–Transformierten.

- **Linearität**

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

- **Konjugation**

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{F(-\omega)}$$

denn

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt}$$

- **Streckung**

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$



# Rechenregeln der Fourier–Transformation.

- **Streckung**

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t} dt &= \operatorname{sgn}(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega \frac{\tau}{c}} \frac{1}{c} d\tau \\ &= \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{c}\tau} d\tau \end{aligned}$$

- **Verschiebungssätze**

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) = F(\omega - a)$$

Folgt durch direktes Einsetzen



# Rechenregeln der Fourier–Transformation.

- **Faltungssatz**

Man nennt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau$$

die **Faltung** der Funktionen  $f$  und  $g$ . Es gilt

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= F(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot G(\omega) \end{aligned}$$



## Ein Beispiel für den Faltungssatz.

Für die Faltung  $g = f * f$  des **Rechteck-Impulses**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$$

gilt

$$g(t) = \int_{-1}^1 f(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 2 - |t| & : -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & : |t| > 2 \end{cases}$$

Nach dem **Faltungssatz** folgt mit dem vorherigen Beispiel direkt

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \omega & : \omega \neq 0 \\ 4 & : \omega = 0 \end{cases}$$



## Rechenregeln der Fourier-Transformation.

- **Differentiation**

Ist  $f(t)$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen  $\tau_1, \dots, \tau_m$  und sind  $f(t)$ ,  $f'(t)$  absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^m \left( f(\tau_k^+) - f(\tau_k^-) \right) e^{-i\omega\tau_k}$$

Beweis mittels partieller Integration.

Ist  $f(t)$  sogar stetig, so folgt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega)$$

und unter entsprechenden Voraussetzungen gilt sogar

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r F(\omega)$$

**Wesentliche Eigenschaft** zum Einsatz der Fourier-Transformation bei Differentialgleichungen.



## Beispiel.

Wir betrachten die **gewöhnliche Differentialgleichung**

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Man berechnet nun die **Fourier–Transformation** der Differentialgleichung

$$\mathcal{F}[y](\omega) = Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y'](\omega) = -i\omega Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y''](\omega) = -\omega^2 Y(\omega)$$

Die Fourier–Transformation der Differentialgleichung lautet damit

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$



## Fortsetzung des Beispiels.

Die **Fourier–Transformation** der Differentialgleichung lautet damit

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

und es ergibt sich

$$Y(\omega) = \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b}$$

Nach **Rücktransformation** ergibt sich

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega t} d\omega$$

und damit

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$



# Anwendung der Fourier–Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die [Wärmeleitungsgleichung](#)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Eine Fourier–Transformation bezüglich der [x–Variablen](#) liefert

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

Damit folgt für die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t = (i\omega)^2 U, \quad \text{für } t > 0, \omega \in \mathbb{R}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $t$  mit Parameter  $\omega$ .



# Anwendung der Fourier–Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Daraus folgt

$$U(\omega, t) = U(\omega, 0) e^{-\omega^2 t} \quad \text{mit} \quad U(\omega, 0) = U_0(\omega)$$

und damit

$$U(\omega, t) = U_0(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

**Rücktransformation:** Mit der gegebenen Anfangsbedingung haben wir die Beziehung

$$\mathcal{F}^{-1}[U_0] = u_0(x)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2 t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$



# Anwendung der Fourier–Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Aus dem Faltungssatz folgt dann

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U_0 e^{-\omega^2 t}] = u_0 * \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel: Potentialproblem für die Halbebene

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fourier–Transformation bezüglich  $x$  (bei festem  $y$ ) liefert die [Poissonsche Integralformel](#) für die Halbebene

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi$$

Navigationssymbole

## Ende der Vorlesung.