

Complex functions for engineering study programs

Jens Struckmeier

Department of Mathematics
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2024

Content of the lecture on complex functions.

- 1 Complex functions of a single variable.
- 2 Möbius–transformation.
- 3 Complex differentiation.
- 4 Conformal mappings.
- 5 Complex integration.
- 6 Cauchy's intergal formula and applicatons.
- 7 Taylor– and Laurent–series.
- 8 Isolated singularities and residue.
- 9 Residue.
- 10 Fourier–transform and partial differential equations.

Chapter 1. Complex numbers

Starting point: consider the **cubic** equation

$$x^3 = 3px + 2q$$

and the solution formula (by Gerolamo Cardano, 16th century)

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Rafael Bombelli (also 16th century) considers the equation

$$x^3 = 15x + 4$$

and obtains the solution formula

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli defines the imaginary unit i via $i^2 = -1$, the complex numbers and their summation and multiplication.

First ideas to introduce the complex numbers.

Starting point: Use the **symbolic** solution i for the equation $x^2 + 1 = 0$, such that

$$i^2 = -1$$

The "number" i is called **imaginary unit**.

Next step: With the imaginary unit we build the set of numbers

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Then we introduce the following rules on \mathbb{C} :

- **Addition**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{for } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

- **Multiplication**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{for } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

With this \mathbb{C} obtains an algebraic structure.

Fundamental question about the complex numbers.

- What exactly is i ?
- With the above rules can we "calculate" without contradictions?
- Are the above rules consistent with the related rules in \mathbb{R} ?
- Can we order the complex numbers?
- Is there alternative representations of the complex numbers?
- Is there a geometric interpretation of the operations in \mathbb{C} ?
- ...
- Why do we introduce the complex numbers?
- ... and later complex functions?
- Is there interesting applications of the complex numbers in engineering?

On the construction of the complex numbers.

Starting point: consider the set $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ with addition}$

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{for } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

and **multiplication**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{for } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Observation: The multiplication is associative and commutative; in addition we have

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{for } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

i.e. $(1, 0) \in \mathbb{C}$ is **neutral element of the multiplication**. The equation

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \quad \text{for } (a, b) \neq (0, 0)$$

has the unique solution, the **multiplicative inverse** to (a, b) ,

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

On the structure of the complex numbers.

Remark: The set \mathbb{R}^2 forms together with the addition and the multiplication a field, the **field of complex numbers** which we denote by \mathbb{C} .

Observation: the map $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, defined by $\varphi(a) = (a, 0)$ is injectiv. For all $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ we have

$$\varphi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

$$\varphi(a_1 a_2) = (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$$

Conclusion:

- We can identify the real numbers as complex numbers of the form $(a, 0)$;
- The real numbers form a **subfield** of \mathbb{C} ;
- The rules for calculation in \mathbb{C} are consistent with the rules in \mathbb{R} .

The field of real numbers is ordered.

Remark: The real numbers form a **ordered field**; the following **order axioms** hold.

- For every $x \in \mathbb{R}$ it is $x > 0$ or $x = 0$ or $x < 0$;
- For $x > 0$ and $y > 0$ it is $x + y > 0$;
- For $x > 0$ and $y > 0$ it is $xy > 0$.

Question: Is the field of complex numbers \mathbb{C} ordered?

Answer: **NO!**

In an ordered field nonzero square numbers are positive. If \mathbb{C} would be ordered then

$$0 < 1^2 = 1 \quad \text{and} \quad 0 < i^2 = -1$$

the contradiction $0 < 1 + (-1) = 0$.

A simpler notation for the complex numbers.

Simplification of the notation:

- For $a \in \mathbb{R}$ we write a instead of $(a, 0)$;
- We denote the complex unit $(0, 1)$ by i ;
- With this every complex number (a, b) can be written

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib$$

and is is

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Conclusion: We have constructed a field \mathbb{C} which includes \mathbb{R} . The equation

$$x^2 + 1 = 0$$

is solvable in \mathbb{C} . The only two solutions are $\pm i$.

Real and imaginary part.

From now on we denote complex numbers by z or w . For

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}$$

x is called the **real part** and y is called the **imaginary part** of z , shortly

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{and} \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

We have the following rules

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \quad \text{for } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) \quad \text{for } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z) \quad \text{for } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(az) = a \operatorname{Im}(z) \quad \text{for } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

and

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{for } z \neq 0.$$

The complex plane.

Geometric representation:

We identify $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ as **point** in the

complex plane (Gauß plane)

given by the cartesian coordinate system of the \mathbb{R}^2 , with a **real axis**, \mathbb{R} , and an **imaginary axis**, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometric representation of the addition:

The usual addition of vectors according to the parallelogram rule.

Representation of the addition of two complex numbers on **slide**.

Conjugation of complex numbers.

We obtain for every complex number $z = x + iy$ by mirroring along the real axis a complex number

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

the **conjugate** complex number.

We have the following rules

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{for } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \text{for } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \text{for } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2 \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

In particular it holds $z = \bar{z}$ if and only if $z \in \mathbb{R}$.

The absolute value.

We set

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{for } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

for the **absolute value** of z and $|z - w|$ for the **distance** of two numbers $z, w \in \mathbb{C}$ in the complex plane.

- Then $|z| = |z - 0|$ represents the Euclidian distance of z to the origin.
- For $z \in \mathbb{R}$ the absolute value $|z|$ coincides with the usual absolute value for real numbers.
- We have the following estimates.

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{and} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

Theorem: The absolute value defines a **norm** on \mathbb{C} , since we have the relations

- ① $|z| \geq 0$ for all $z \in \mathbb{C}$ and $|z| = 0$ if and only if $z = 0$;
- ② $|z + w| \leq |z| + |w|$ for all $z, w \in \mathbb{C}$ (**triangle inequality**);
- ③ $|zw| = |z| \cdot |w|$ for all $z, w \in \mathbb{C}$.

The Euler's formula.

In the complex plane we have for $z = x + iy$ using **polar coordinates**

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

the **Euler's formula**

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

where $\varphi \in [0, 2\pi)$ for $z \neq 0$ represents the (unique) angle between the positive real axis and the ray from 0 through $z = (x, y)$.

The angle $\varphi \in [0, 2\pi)$ is called **polar angle (azimuth, argument)** of $z \neq 0$, shortly

$$\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

Example: $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, thus $e^{i\pi} + 1 = 0$.

The geometry of multiplication and division.

Using polar coordinates the multiplication of two complex numbers $z, w \in \mathbb{C}$ can be interpreted as **rotational dilation** in the complex plane, since for

$$z = |z| (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad \text{and} \quad w = |w| (\cos(\psi), \sin(\psi))$$

we have

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)(\cos(\psi) + i \sin(\psi))) \\ &= |z| \cdot |w| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

and with the Euler's formula

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \exp(i\varphi) \exp(i\psi) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi))$$

For the division of two complex numbers $z, w \in \mathbb{C}$ with $z \neq 0$ we have in analogy

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

Powers and roots of unity.

For the n -th power z^n of $z \in \mathbb{C}$ we have

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

The equation

$$z^n = 1$$

has n pairwise different solutions

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{for } k = 0, \dots, n-1.$$

These solutions are called n -th roots of unity.

Chapter 2. Complex valued functions of a single variable

A **complex function** $w = f(z)$ is a map $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ with $D \subset \mathbb{C}$, i.e. for every $z \in D$ there is a unique $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

The set D is the **domain (of definition)** of f . The set

$$W = f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$$

is called the **codomain**.

Notation:

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re}(w)$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im}(w)$$

For a geometric representation of complex functions often images of **coordinate nets** are used.

2.1 Linear functions

Definition: A complex function f is called **linear**, if f for fixed complex constants $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, has a representation of the following form

$$f(z) = az + b \quad \text{for } z \in \mathbb{C}.$$

Question: Can we interpret linear functions geometrically?

Special case 1: The choice $a = 1$ leads to a **translation** of b ,

$$f(z) = z + b \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

Special case 2: The choice $a \in (0, \infty)$ and $b = 0$ leads to a **dilation** or **contraction**,

$$f(z) = az \quad \text{for } z \in \mathbb{C},$$

i.e. the absolute value of z is **dilated** ($a > 1$) or **contracted** ($0 < a < 1$). In general we talk about a **scaling** with **scaling factor** $a > 0$.

Other special cases of linear functions.

Special case 3: The choice $a \in \mathbb{C}$ with $|a| = 1$ and $b = 0$ leads to a **rotation**,

$$f(z) = az \quad \text{for } z \in \mathbb{C},$$

More precisely: a rotation with angle $\alpha \in [0, 2\pi)$, where $\alpha = \arg(a)$ and $a = \exp(i\alpha)$.

Special case 4: The choice $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ and $b = 0$ leads to a **rotational dilation**

$$f(z) = az \quad \text{for } z \in \mathbb{C},$$

which we understand as a combination of a rotation and a scaling.

More precisely: For

$$a = |a| \exp(i\alpha) \quad \text{with } \alpha = \arg(a)$$

we have a rotation with angle $\alpha \in [0, 2\pi)$ and a scaling with factor $|a|$.

The general case of linear functions.

For $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, every linear function

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

can be written as composition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

of three maps,

- 1 $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ a **rotation** with angle $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- 2 $f_2(z) = |a|z$ a **dilation** with scaling factor $|a| > 0$;
- 3 $f_3(z) = z + b$ a **shift** with a vector b .

Remark: rotation f_1 and dilation f_2 commute, i.e. can be exchanged since

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

and thus

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

Chapter 2. Complex valued functions of a single variable

2.2 Quadratic functions

Definition: A complex function f is called **quadratic**, if f for fixed constants $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, has the following form.

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

First we consider the geometric behaviour of the function

$$f(z) = z^2 \quad \text{for } z \in \mathbb{C}$$

To do so we consider the image under f of straight lines parallel to the coordinate axes.

Set $w = z^2$. Then with $z = x + iy$ and $w = u + iv$ we obtain the representation

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

and thus

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{and} \quad v = 2xy.$$

Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto z^2$.

For the image of a straight line $y = y_0$ parallel to the x -axis we obtain

$$u = x^2 - y_0^2 \quad \text{and} \quad v = 2xy_0$$

For $y_0 = 0$ (the x -axis) we obtain $u = x^2$ and $v = 0$.

For $y_0 \neq 0$ we can eliminate x with $x = v/(2y_0)$ and obtain

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2,$$

a parabola open to the right, symmetric with respect to the u -axis with focus in zero, intersecting the u -axis in $u = -y_0^2$ and the v -axis in $v = \pm 2y_0^2$.

Conclusion: The family of straight lines parallel to the x -axis by the quadratic function $f(z) = z^2$ is mapped on a family of **confocal** (i.e. same symmetry axis, same focus) parabolas, open to the right.

The lines $y = y_0$ and $y = -y_0$ are mapped onto the same parabola.

Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto z^2$.

For the image of a straight line $x = x_0$ parallel to the y -axis we obtain

$$u = x_0^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2x_0y$$

For $x_0 = 0$ (the y -axis) we obtain $u = -y^2$ and $v = 0$.

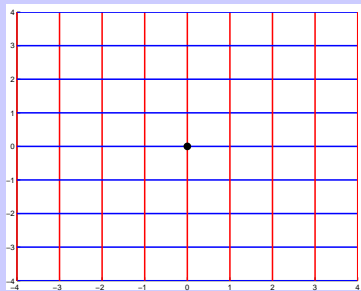
For $x_0 \neq 0$ we can eliminate y with $y = v/(2x_0)$ and obtain

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

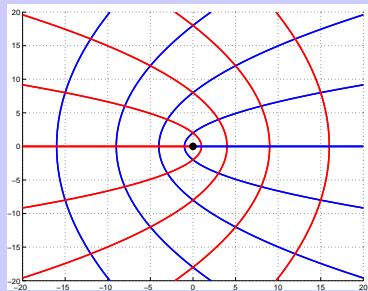
a parabola open to the left, symmetric to the u -axis with focus zero, intersecting the u -axis in $u = x_0^2$ and the v -axis in $v = \pm 2x_0^2$.

Conclusion: The family of straight lines parallel to the y -axis by the quadratic function $f(z) = z^2$ is mapped on a family of **confocal** parabolas, open to the left. The lines $x = x_0$ and $x = -x_0$ are mapped onto the same parabola.

Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto z^2$.



Domain.



Codomain of $f(z) = z^2$.

General quadratic functions.

For $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, and the representation

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

every quadratic function can be written as a composition of 4 maps

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

consisting in:

- 1 a shift $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$;
- 2 a quadratic function $f_2(z) = z^2$;
- 3 a rotational dilation $f_3(z) = az$;
- 4 a shift $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

2.3 The exponential function

Definition: The **complex exponential function** $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is defined as

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \quad \text{for } z = x + iy.$$

We observe: The rule for the addition holds

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{for } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Question: How does the complex exponential function $z \rightarrow \exp(z)$ look like?

For $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ and $w = u + iv$ we obtain

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

and thus

$$u = e^x \cos(y) \quad \text{and} \quad v = e^x \sin(y)$$

Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto \exp(z)$.

For the image of a straight line $y = y_0$ parallel to the x -axis we obtain

$$u = e^x \cos(y_0) \quad \text{and} \quad v = e^x \sin(y_0)$$

- For fixed y_0 this gives a ray starting from the origin with angle y_0 with respect to the the x -axis.
- For angles y_0 and y_1 , which differ by a multiple of 2π , i.e.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{for a } k \in \mathbb{Z},$$

we obtain the same ray.

- **More precisely:** Due to the [periodicity](#) of $\exp(z)$ we have

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

i.e. two points with identical real part, which imaginary parts only differ by a multiple of 2π , are mapped onto the same point.

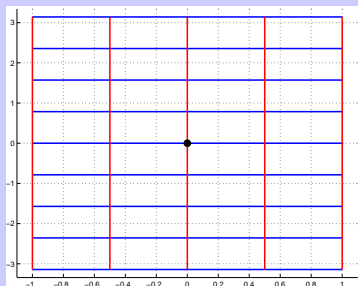
Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto \exp(z)$.

For the image of a straight line $x = x_0$ parallel to the y -axis we obtain

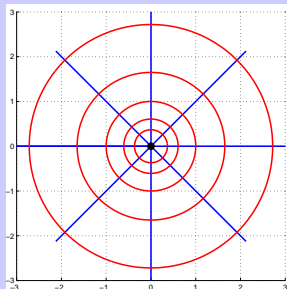
$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- For fixed x_0 this gives a circle around the origin with radius e^{x_0} .
- **Observe:** The origin does not lie in the codomain of the exponential function, i.e. there is no $z \in \mathbb{C}$ with $\exp(z) = 0$. Therefore $e^z \neq 0$ for all $z \in \mathbb{C}$.
- **Observation:** The exponential function maps rectangular lattices in the cartesian coordinate system onto lattices of curves which intersect orthogonally.
- **More precisely:** Curves which intersect orthogonally in the cartesian coordinate system, are mapped by the exponential function \exp onto curves, which intersect orthogonally (in the images of the intersection point)
- **Even more general:** The exponential function is **isogonal** or **conformal** in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. More details later.

Images of straight lines parallel to the axes under $z \mapsto \exp(z)$.



Domain.



Codomain of $f(z) = \exp(z)$.

2.4 The inverse function

Definition: A complex function $f = f(z)$ is called **injective**, if for every point $w \in \mathbb{C}$ in the domain there is exactly one point $z \in \mathbb{C}$ in the codomain with $f(z) = w$.

Remark: A non-injective function might become injective if the domain is appropriately restricted.

Examples.

- 1 the linear function $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ is injective.
- 2 the quadratic function $f(z) = z^2$ is **not** injective, since we have $f(z) = f(-z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.
- 3 the complex exponential function $\exp(z)$ is **not** injective, since we have $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$ for all $k \in \mathbb{Z}$ and all $z \in \mathbb{C}$.

Restriction of the domain.

Remark: A non-injective function might become injective if the domain is appropriately restricted.

Example: Consider the quadratic function

$$f(z) = z^2 \quad \text{for } z \in \mathbb{C} \text{ with } \operatorname{Re}(z) > 0$$

on the **right halfplane** $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. There f is injective.

In this case the codomain is given by the "**partly cutted**" complex plane

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ or } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

Graphical representation of the domain and codomain on a **slide**.

The inverse function.

Definition: Let f be an injective function with domain $D(f)$ and codomain $W(f)$. Then the **inverse function** $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ to f is the function, which maps every point $w \in W(f)$ onto the (unique) point $z \in D(f)$ with $f(z) = w$, i.e. it is $f^{-1}(w) = z$ and

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z \quad \text{for all } z \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \text{for all } w \in W(f)$$

Example: For the domain

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ and } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

there exists an inverse function f^{-1} of $f(z) = z^2$ with codomain $W(f) = \mathbb{C}^-$.

For the **main value of the root** $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ it is

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{for } z = re^{i\varphi} \text{ with } \varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

2.5 The complex logarithm

Aim: To invert the complex exponential function

$$f(z) = \exp(z).$$

Observe: The exponential function $\exp(z)$ is defined for **all** $z \in \mathbb{C}$ and we have

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{and} \quad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

for the domain and the codomain.

But: The exponential function is not injective on \mathbb{C} .

Also: For the construction of the inverse function \exp^{-1} of \exp we need to restrict the domain of \exp appropriately.

Question: Let $z = x + iy \in W(\exp)$. Which values $w = u + iv$ are possible such that

$$e^w = z?$$

Construction of the complex logarithm.

Starting point: For $z = x + iy \in W(\exp)$ it should be

$$e^w = z \quad \text{for a } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Then

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

and thus $u = \ln(|z|)$, where $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ denotes the **real** logarithm.

In addition we have

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

and thus $v = \arg(z) + 2\pi k$ for a $k \in \mathbb{Z}$.

Therefore the set of solutions of $e^w = z$ consists of complex numbers

$$w = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{with a } k \in \mathbb{Z}.$$

The set of solutions of $e^w = z$ is called **complex logarithm** of z .

Examples.

The function $\text{Log}(z)$ denotes the complex logarithm of z .

Example 1: How does the set $\text{Log}(-1)$ look like? We have $\ln(|-1|) = \ln(1) = 0$ and the argument of -1 is $\arg(-1) = \pi$. Thus

$$\text{Log}(-1) = \{i(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

for the values of the logarithm of -1 .

Example 2: How does the set $\text{Log}(-1 + i)$ look like? We have $|-1 + i| = \sqrt{2}$ and it is $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ the argument of $-1 + i$. Thus

$$\text{Log}(-1 + i) = \left\{ \ln(\sqrt{2}) + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

for the values of the logarithm of $-1 + i$.

Example 3: For $x > 0$ it is $\text{Log}(x) = \{\ln(x) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

The principal value of the logarithm.

The previous considerations for the equation

$$z = e^w$$

show that the exponential function is injective on the strip

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}.$$

The related codomain is \mathbb{C}^- .

The unique value of $\operatorname{Log}(z)$ being element in the strip S is

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) \quad \text{with } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

This value is called **principal value of the logarithm** of z , shortly $\operatorname{Ln}(z)$.

Remark: The principal value is only defined in the "opened" complex plane \mathbb{C}^- . On the negative real axis and at $z = 0$ the $\operatorname{Ln}(z)$ is not defined. On the positive real axis $\operatorname{Ln}(z)$ coincides with the real logarithm $\operatorname{Ln}(x)$.

2.6 The Joukowski–function

The **Joukowski–function** is defined as

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{for } z \neq 0,$$

and has an interesting connection to fluid mechanics.

Observation: We have the symmetry

$$f(z) = f(1/z) \quad \text{for } z \neq 0.$$

Aim: Analyse the geometric behaviour of the Joukowski–function.

To do so determine for

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

the images of the circles $|z| = \text{const.}$ and the rays $\arg(z) = \text{const.}$

Geometric behaviour of the Joukowski–function.

For $z = re^{i\varphi}$ and $w = u + iv$ we obtain

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

and thus

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi) \quad \text{and} \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi).$$

For the images of the circles $r \equiv r_0 > 0$ we obtain the parameterized form

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos(\varphi) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

For the unit circle $r_0 \equiv 1$ we have $u = \cos(\varphi)$, for $0 \leq \varphi < 2\pi$, and $v \equiv 0$, i.e. the line between -1 and 1 , which is reached **twice**.

Geometric behaviour of the Joukowski–function.

For $r_0 \neq 1$ we can eliminate φ and we obtain the ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$

with the semi axes

$$a = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$$

and the foci ± 1 .

Conclusion: The Joukowski–function maps a collection of circles $r \equiv \text{const.}$ onto a collection of **kofocal ellipses**. The two circles $r \equiv r_0$ and $r \equiv 1/r_0$ are mapped onto the same ellipse.

Geometric behaviour of the Joukowski–function.

For the image of the ray $\varphi \equiv \varphi_0$ we obtain

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi_0) \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

and therefore for the positive x -axis $\varphi_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} 0 < r < \infty,$$

the subset $\{(u, 0) \mid 1 \leq u < \infty\}$ of the u -axes.

In analogy we obtain for the negative x -axis $\varphi_0 = \pi$ the piece $-\infty < u < -1$.

The rays $\varphi_0 = \pi/2$ (positive y -axis) and $\varphi_0 = 3\pi/2$ (negative y -axis) are mapped onto the (complete) v -axis.

Geometric behaviour of the Joukowski–function.

If $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ we can eliminate r . Thus we obtain the hyperbola

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

with the semiaxes

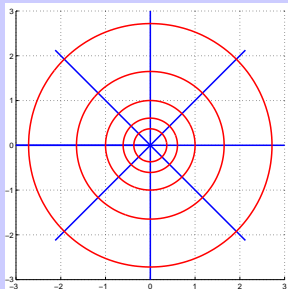
$$a = |\cos(\varphi_0)| \quad \text{and} \quad b = |\sin(\varphi_0)|.$$

The distance of the foci from the origin is

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Therefore the two foci are in ± 1 .

Images of the Joukowski-function.



Domain.
Joukowski-function.

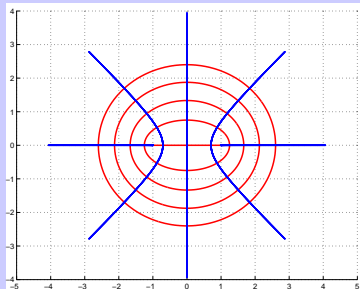


Image under the

Additional remarks to the Joukowski–function.

- 1 The Joukowski–function maps the net of polar coordinates onto a net of ellipses and hyperbolas which intersect orthogonally. Thus the Joukowski–function is isogonal.
- 2 The Joukowski–function is **not** injective on its domain $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ since for every $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$ it is $z \neq 1/z$, but $f(z) = f(1/z)$.
- 3 On the following two restrictions of the domain the Joukowski–function becomes injectiv.
 - On the **complement of the unit circle** $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.
 - On the **upper half plane** $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
- 4 The inverse function $w = f^{-1}(z)$ of the Joukowski–function $f(w)$ is obtained by solving the related quadratic equation

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

w.r.t. w in the related domain $D(f)$, thus $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Chapter 3. The Möbius–transform

3.1 The stereographic projection

Preliminaries: In analysing rational functions

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{with polynomials } p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

it is reasonable to close the **gaps** in the domain (i.e. the zero's of $q(z)$) by attributing to $R(z)$ in these points the “value” ∞ if at such point not at the same time the nominator $p(z)$ vanishes.

Notation: If $z^* \in \mathbb{C}$ is a zero of q , i.e. $q(z^*) = 0$, and $p(z^*) \neq 0$, then $R(z^*) = \infty$, i.e. the codomain of R is enlarged by adding the “number” ∞ .

Definition: In the extension $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ of the complex plane ∞ is denoted as **infinitely far point**.

Extension of the rules of calculus for \mathbb{C}^* .

In the extended complex plane \mathbb{C}^* in addition to the usual rules in \mathbb{C} we define the following [rules](#).

$$a + \infty := \infty \quad \text{for } a \in \mathbb{C}$$

$$a \cdot \infty := \infty \quad \text{for } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$a/\infty := 0 \quad \text{for } a \in \mathbb{C}$$

Warning: The combinations $0 \cdot \infty$ and $\infty \pm \infty$ cannot be defined reasonably (i.e. without contradictions).

Topological meaning: The extended complex plane \mathbb{C}^* is a [topological space](#). For a complex sequence $\{z_n\}_n$, $z_n \neq 0$, we have

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad \iff \quad 1/z_n \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

The space \mathbb{C}^* is [sequentially compact](#), i.e. [every](#) sequence in \mathbb{C}^* has (at least) one limit point. Thus \mathbb{C}^* is denoted as [compactification](#) of \mathbb{C} .

The stereographic projection.

Definition: The stereographic projection is the map $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ which maps the Riemann sphere

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

on the extended complex plane \mathbb{C}^* , in particular it maps a point $x \in \mathbb{S}^2$, $x \neq N = (0, 0, 1)^T$, onto the point in the x_1 - x_2 -plane (considered to lie below the sphere) which lies on a straight line from the north pole N of the sphere through the point x on the sphere. And N is mapped to $P(N) := \infty$.

The stereographic projection has the following analytical representation

$$z = P(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{for } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

Remark:

- 1 The stereographic projection $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ is bijective.
- 2 The inverse map P^{-1} of P is given by

$$x = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{for } z \in \mathbb{C}^*.$$

The geometry of the stereographic projection.

By a **spherical image** U of a set $B \subset \mathbb{C}^*$ in the following we understand the (original) domain which under the stereographic projection is mapped on B , i.e. $P(U) = B$.

Theorem: The stereographic projection has the following properties.

- a) The spherical image of a straight line in \mathbb{C}^* is a circle on \mathbb{S}^2 containing N .
- b) A circle on \mathbb{S}^2 , passing through N , is mapped under the stereographic projection on a straight line in \mathbb{C}^* .
- c) The spherical image of a circle in \mathbb{C} is a circle in \mathbb{S}^2 , NOT passing through N .
- d) A circle on \mathbb{S}^2 , NOT passing through N , is mapped under the stereographic projection on a circle in \mathbb{C} .
- e) The stereographic projection is **conformal**.

Chapter 3. The Möbius–transform

3.2 Möbius–transforms

Definition: A rational map of the form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{with} \quad ad \neq bc$$

is called **Möbius–transform**.

Remark: For the Möbius–transform $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ it holds:

- 1 Nominator and denominator have no common zero.
- 2 It is $T(-d/c) = \infty$ and $T(\infty) = a/c$.
- 3 The map $T(z)$ is bijective with inverse map $T^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

- 4 Analogy to the inverse of a (2×2) –matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Composition of Möbius-transforms.

Theorem: The composition of two Möbius-transforms is **again** a Möbius-transform. More precisely

$$\begin{aligned}w = T_1(z) &= \frac{az + b}{cz + d} && \text{for } ad \neq bc \\u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) &= \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} && \text{for } \alpha\delta \neq \beta\gamma \\&= \frac{Az + B}{Cz + D}\end{aligned}$$

The coefficients A, B, C and D can be obtained from the **matrix product**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Due to $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ we have

$$AD - BC = (ad - bc) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$

Conformality of Möbius-transforms.

Theorem: Möbius-transforms are **conformal**, i.e. (generalized) circles in \mathbb{C}^* are mapped by Möbius-transforms in (generalized) circles.

Proof: Use an appropriate decomposition for $c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Now we set

$$w_1 = cz + d$$

$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$w_3 = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot w_2$$

The maps w_1 and w_3 are linear and thus **conformal**.

Continuation of the proof.

It remains to show:

The inversion $w = f(z) = 1/z$ is a conformal map.

We use the detour via the stereographic projection, i.e. instead of $z \rightarrow 1/z$ we consider the three of maps

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

Then we have

$$x = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right)^T$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1}, \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{i\left(\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1\right)}, \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} - 1}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1} \right)^T \end{aligned}$$

Completion of the proof.

A simplification gives

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \left(\frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, -\frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, -\frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \\ &= (x_1, -x_2, -x_3)^T\end{aligned}$$

Thus we obtain a map $F : S^2 \rightarrow S^2$ with

$$F(x) = (x_1, -x_2, -x_3)^T$$

This map is a rotation of the sphere around the x_1 -axis by 180° and apparently [conformal](#).

Therefore we have proved that the three maps

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

are conformal. With this the inversion $z \rightarrow 1/z$ is conformal.

Remarks on the Möbius-transform.

Remark: The Möbius-transform

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{with } ad \neq bc$$

has the following properties.

- (Generalized) circles through the point $-d/c$ are mapped by T on straight lines in the w -plane.
- All straight lines in the z -plane are mapped by T on (generalized) circles in the w -plane containing the point a/c .
- Circles **not** containing the point $-d/c$ are mapped by T on circles **not** containing the point a/c .

Cross-ratio's and Möbius-transforms.

Theorem: Let $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ and $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ be pairwise different. Then there exists **exactly one** Möbius-transform $w = T(z)$ satisfying the interpolations

$$w_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

The interpolating Möbius-transform $T(z)$ is given by the **three-point-formula**

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Definition: The expression

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

is called **cross-ratio** of the points z_0, z_1, z_2, z_3 .

Example.

We are looking for the Möbius–transform with **interpolation properties**

$$\begin{array}{c|ccc} z_j & 1 & i & 0 \\ \hline w_j & i & -i & 0 \end{array}$$

We obtain a unique Möbius–transform using the Ansatz

$$\frac{w - i}{w + i} : \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{0 - 1}{0 - i}$$

A simplification gives

$$-\frac{w - i}{w + i} = i \frac{z - 1}{z - i}$$

or

$$(z - i)(w - i) = -i(z - 1)(w + i)$$

This finally leads to gives

$$w = \frac{(1 + i)z}{(1 + i)z - 2i}$$

Symmetry w.r.t. the circle.

Definition:

Let C in \mathbb{C} be circle with center $z_0 \in \mathbb{C}$ and radius R . Two points $z, z' \in \mathbb{C}$ are called **symmetric w.r.t. the circle C** , if

$$(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$$

The map $z \rightarrow z'$ is called **circle inversion on C** or **plane inversion on C** .

Graphical representation of the plane inversion in the slide!

Remarks:

- A point z with $|z - z_0| \leq R$ is symmetric w.r.t. a point z' with $|z' - z_0| \geq R$.
- If $|z - z_0| = R$, then z is symmetric to itself, i.e. $z' = z$.
- The point $z = z_0$ is symmetric to $z' = \infty$.

Möbius-transforms a circle symmetries.

Definition: Two points z, z' are called **symmetric with respect to a straight line** in \mathbb{C} , if z' is obtained from z by reflection across a line.

Theorem:

Möbius-transforms conserve **symmetries** w.r.t. (generalized) circles.

More precisely:

If C is a (generalized) circle in \mathbb{C}^* and if z and z' are symmetric w.r.t. C , then the images z, z' of a Möbius-transform are symmetric w.r.t. the to the (generalized) circle in \mathbb{C}^* , which is the image of C .

Example: We look for a Möbius-transform $w = T(z)$, such that the circle $|z| = 2$ is mapped on the circle $|w + 1| = 1$ with $T(-2) = 0$ and $T(0) = i$.

A Möbius-transform is uniquely determined if the transformation is given for **three** points. But we only have

$$z_1 = -2, z_2 = 0 \quad \text{and} \quad w_1 = 0, w_2 = i$$

Therefore **one** point is missing!

Continuation of the example.

According to the last theorem Möbius-transforms conserve symmetries w.r.t. generalized circles.

$$z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \infty \quad \text{is symmetric to } z_2 \text{ w.r.t. the circle } |z| = 2$$

Thus w_3 is the point symmetric to $w_2 = i$ w.r.t the circle $|w + 1| = 1$ and therefore given by the condition $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$, i.e.

$$w_3 = \frac{1}{2}(-1 + i)$$

Application of the [three point formula](#) gives

$$\frac{w - 0}{w - i} : \frac{w_3 - 0}{w_3 - i} = \frac{z + 2}{z - 0} : \frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

What happens to

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

as $z_3 \rightarrow \infty$?

Completion of the example.

What happens to

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

as $z_3 \rightarrow \infty$?

It is

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} = \frac{1 + \frac{2}{z_3}}{1 + \frac{0}{z_3}} \rightarrow 1 \quad \text{for } z_3 \rightarrow \infty$$

We obtain

$$\left(\frac{w}{w - i} \right) : \left(\frac{\frac{1}{2}(-1 + i)}{\frac{1}{2}(-1 + i) - i} \right) = \left(\frac{z + 2}{z} \right)$$

and solving w.r.t w gives

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}$$

Example.

For $b > a > 0$ we consider the Möbius-transform

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p} \quad \text{where } p = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

Using T we obtain

$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0$$

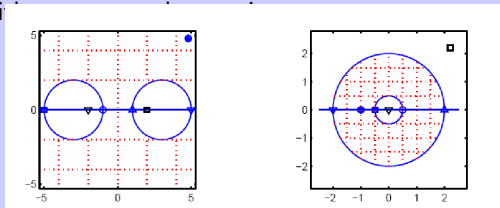
$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm \varrho \quad \text{with } |\varrho| > 1$$

$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\varrho}$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad w_{7,8} = 1, -1.$$

Continuation of the example.

- The x -axis is mapped by T onto the u -axis.
- Points which are symmetric with respect to the x -axis are mapped onto points which are symmetric w.r.t. the u -axis.
- Circles being symmetric w.r.t. the x -axis are mapped onto circles being symmetric w.r.t. the u -axis.



Important applications: The electrostatic field in the exterior of two parallel conducting lines is mapped on the field of a cylindrical condenser.

4.1 Complex differentiation

Definition: Let $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ be a complex function. $f(z)$ is called **complex differentiable** in the point $z_0 \in D^0$ with derivative $f'(z_0)$, if the limit

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

exists. If $f(z)$ is complex differentiable in every point in the domain D , we call $f(z)$ **holomorphic** or **analytic** on D .

Remark:

- 1 The limit process $z \rightarrow z_0$ is intended in the complex plane, i.e. the approach $z \rightarrow z_0$ is **arbitrary**.
- 2 The division in the limit is a division in **complex** numbers.

4.1 Complex differentiation

Lemma: If $f(z)$ is real valued, i.e. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$ a domain, and if $f(z)$ is holomorphic on D , then $f(z)$ is a constant function.

Proof: We first consider the sequence $z_n \rightarrow z_0$ given by

$$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$$

The the differential quotient is real for all $n \in \mathbb{N}$ since

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R}$$

On the other hand the sequence $z_n \rightarrow z_0$ with $z_n = z_0 + i/n$ gives a purely imaginary differential quotient

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{n}{i}(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{C}$$

Since the function is holomorphic on D it follows

$$f'(z_0) = 0 \quad \text{for all } z_0 \in D.$$

The Cauchy–Riemannschen equations.

Remark: If the function $f(z)$ is complex differentiable in z_0 , then

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

or equivalently

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Let $f(z)$ be complex differentiable in z_0 . We set

$$\gamma := f'(z_0),$$

then we obtain the equivalent formulation

$$f(z) = f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

with $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ as $z \rightarrow z_0$.

The Cauchy–Riemannschen equations.

We now use with $z = x + iy$ the [formulation](#)

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

and

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

Thus we obtain

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \operatorname{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

$$v(z) = v(z_0) + \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \operatorname{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

In [matrix formulation](#) this reads as

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

The Cauchy–Riemannschen equations.

We interpret $f(z)$ as vector valued, **totally differentiable** function of two variables, i.e.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

with the **Jacobian–matrix**

$$Jf(x_0, y_0) = \left(\begin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = \left(\begin{array}{cc} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{array} \right)$$

Theorem: The function $f(z)$ is complex differentiable in $z_0 \in D$ if and only if $f(z)$ as function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is totally differentiable and if the **Cauchy–Riemannschen equations** hold

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Representation of the complex differentiation.

Corollary: If $f(z)$ is complex differentiable in $z_0 \in D$, then

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$$

Proof: Since $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ we can write

$$f'(z_0) = \tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)$$

From this we obtain

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (\tilde{u}(z_0) + i\tilde{v}(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i(y - y_0)] \\ &= \tilde{u} \cdot (x - x_0) - \tilde{v} \cdot (y - y_0) + i(\tilde{v} \cdot (x - x_0) + \tilde{u} \cdot (y - y_0)) \end{aligned}$$

Since f is totally differentiable in z_0 and since the Cauchy–Riemannschen equations are satisfied we have on the other side

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cdot (x - x_0) - v_x \cdot (y - y_0) \\ v_x \cdot (x - x_0) + u_x \cdot (y - y_0) \end{pmatrix}$$

Holomorphic functions and the Laplace's equation.

Theorem: If $f \in \mathcal{C}^2$ is holomorphic on D , then

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

i.e. both real and imaginary part of f satisfy the Laplace's equation.

Proof: If $f(z)$ is holomorphic, then

$$\Delta u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \stackrel{C.R.}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \stackrel{C.R.}{=} -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Also, the following **inversion** holds true: If $u = u(x, y)$ satisfies the Laplace's equation $\Delta u = 0$ on a connected domain, then there exists a differentiable function $v = v(x, y)$ such that $f(z) = u(z) + iv(z)$ on D is holomorphic.

Proof of the inversion.

Let $u = u(x, y)$ be given with $\Delta u = 0$. We are looking for a function $v = v(x, y)$, such that the Cauchy–Riemannschen equations are satisfied. Thus

$$v_x = -u_y \quad v_y = u_x$$

From the C.R. equations it follows

$$\text{grad } v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$$

Therefore we are looking for a potential v with $\text{grad } v = V$. If the **integrability conditions**

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

are satisfied, the existence of such a potential is guaranteed.

This is true since

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

Rules for the differentiation.

- The following rules hold:

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

- **Chain rule:** If $f(z)$ is differentiable in z_0 and if $g(w)$ is differentiable in $w_0 = f(z_0)$, then

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

- **Derivation of the inverse function:** If $f(z)$ is holomorphic and if $f'(z_0) \neq 0$, then $f(z_0)$ is locally bijective around z_0 and we have

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0)$$

The modified chain rule.

Lemma: If $f(z)$ is holomorphic on D and if $c : [a, b] \rightarrow D$ is a C^1 -curve in D , then

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$$

Proof: We have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(c(t)) &= \frac{d}{dt}u(c(t)) + i \frac{d}{dt}v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i(v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2)\end{aligned}$$

In addition we have

$$\begin{aligned}f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i(v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2)\end{aligned}$$

Both expressions are identical due to the C.R. equations.

Examples.

Example 1:

For $f(z) = z$ we obtain due to $u(x, y) = x$ and $v(x, y) = y$

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 1$$

Thus complex polynomials on \mathbb{C} are holomorphic with

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}$$

Explicit calculation for $f(z) = z^2$: with

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

we calculate

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 2x + i 2y = 2z$$

Examples.

Example 2: Rational functions, i.e. functions of the form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ complex polynomials}$$

are complex differentiable at every point with $q(z) \neq 0$.

Example 3: The exponential function $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ is complex differentiable with $f'(z) = e^z$, since with

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

the C.R. equations are satisfied

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

and we have

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

More examples.

Example 4: The trigonometric functions

$$\sin z := \frac{1}{2j} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

are according to example 3 holomorphic on \mathbb{C} and we have the formulas for the derivatives in analogy to the real valued functions.

Example 5: Functions defined as complex power series,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

are holomorphic on the domain of convergence $K_r(z_0)$ with

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

and thus on $K_r(z_0)$ at the same time **arbitrary many times** complex differentiable.

4.2 Conformal mappings

Theorem: Let $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ be a holomorphic function on the domain $D \subset \mathbb{C}$ with $f'(z) \neq 0$ for all $z \in D$. Then locally in a point $z_0 \in D$ we have:

- Angles** between curves which intersect in z_0 are conserved under the transformation $w = f(z)$, including the rotational direction,
- the expression $|f'(z_0)|$ is for all directions "leaving" z_0 the common **scaling**. In particular relations of lengths are conserved.

Mappings with these properties are called **conformal mappings**.

For conformal mappings we have the following **inversion** of the theorem.

Theorem: If $w = f(z)$ is a conformal mapping and if the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is continuously differentiable, then $f(z)$ is complex differentiable and we have $f'(z) \neq 0$.

Proof of the first theorem.

Let c and d be two curves which at $t = 0$ go through z_0 . The two tangential vectors in this point are $\dot{c}(0)$ and $\dot{d}(0)$ and for the angle γ between the tangential vectors we have

$$\gamma = \angle(\dot{c}(0), \dot{d}(0)) = \arg(\dot{d}(0)) - \arg(\dot{c}(0))$$

With f we obtain the two curves $f \circ c$ and $f \circ d$ in the codomain. The angle $\tilde{\gamma}$ between these two curves in $f(z_0)$ in the codomain is

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle(f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{d}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)\dot{c}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{c}(0)) = \gamma\end{aligned}$$

and w.r.t the scaling of lengths we calculate

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ c) \right\| = |f'(z_0)\dot{c}(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{c}(0)|$$

Conformal transformations.

Definition: Let $f : D \rightarrow D'$ be a bijective and conformal mapping between the domains $D \subset \mathbb{C}$ and $D' \subset \mathbb{C}$. Let $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a **real valued** twice continuously differentiable function on D . Then we call the function $\Psi : D' \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$

the **conformal transformation** of Φ with mapping f .

Physical Applications: If $\Phi(z)$ is an unknown potential defined in the in the **physical plane** D , then Ψ is the related function in the **modell plane** D' . In the following Φ and Ψ are **potentials**, i.e.

- electrostatic potentials;
- fluid dynamic potentials;
- temperature fields etc.

The vectors (Φ_x, Φ_y) and (Ψ_u, Ψ_v) are of particular interest.

The complex gradient.

Definition: For a **real valued** function $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ on a domain $D \subset \mathbb{C}$ we call with $z = x + iy$ the expression

$$\text{grad } \Phi(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

the **complex gradient** of $\Phi(z)$.

Theorem: Let Ψ be the **conformal transformation** of Φ with mapping f . Then the two relations

$$\text{grad}_z \Phi(z) = \text{grad}_w \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

$$\Delta_z \Phi(z) = \Delta_w \Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$$

hold. **Proof:** By definition the **conformal transformation** of Φ with mapping f is given by

$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$

Continuation of the proof.

We conclude $\Phi = \Psi \circ f$ and with $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$$

We calculate

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x$$

$$\Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y$$

For the **complex gradient** we have with $f'(z) = u_x + i v_x$

$$\text{grad } \Phi(z) = (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y)$$

$$= \Psi_u(u_x + i u_y) + \Psi_v(v_x + i v_y)$$

$$\stackrel{C.R.}{=} \Psi_u(u_x - i v_x) + i \Psi_v(u_x - i v_x)$$

$$= \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

Completion of the proof.

Calculating the **second derivative** gives

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu}u_x^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu}u_y^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}$$

Thus

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Psi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\Psi_{uv}(u_xv_x + u_yv_y) \\ &\quad + \Psi_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \Psi_u\Delta u + \Psi_v\Delta v\end{aligned}$$

We use again the C.R. equations and obtain

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

$$u_xv_x + u_yv_y = 0$$

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

and therefore the desired result

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2$$

Practical applications of conformal transformations.

Corollary: Conformal transformations transform harmonic functions into harmonic functions.

Applications of conformal transformations: Lets consider the **Dirichlet–problem** for the Laplace equation, i.e. the boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = g & \text{on } \partial D \end{cases}$$

where $D \subset \mathbb{R}^2$ is a “**complicated**” two-dimensional domain.

With an appropriate **conformal transformation** we can solve the problem explicitly.

- 1 identify a conformal transformation which maps the physical domain D on a “**simple**” model domain D' ;
- 2 transform the boundary conditions on ∂D to boundary conditions on $\partial D'$ and solve the Dirichlet–problem on D' ;
- 3 Transform the solution back on the physical domain D .

An application: plain potential flow.

We would like to determine the velocity field of a **stationary, curl- and source-free flow around a cylinder**. Let $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the velocity field to be determined.

Then we have the equations

$$\operatorname{rot} w = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0$$

If $D \subset \mathbb{R}^2$ is simply connected we obtain from the first condition

there exists a function $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ with $\nabla u = -w$

and from the second condition

there exists a function $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ with $\nabla v = (w_2, -w_1)^T$

The complex flow potential.

We call

- the function u the **velocity potential**;
- the function v the **stream function**.

Related to the stream function we have **stream lines** which are solutions of the ordinary differential equations $y'(x) = w_2/w_1$ and given by

$$v(x, y) = \text{const.}$$

Definition: The complex function $\Phi = \Phi(x, y)$ defined by

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

is called **complex flow potential**.

The complex flow potential $\Phi(z)$ is a holomorphic function, since we have the Cauchy–Riemann equations

$$u_x - v_y = -w_1 - (-w_1) = 0$$

$$u_y + v_x = -w_2 + w_2 = 0$$

Continuation: plain potential flow.

The velocity field w can be calculated directly: due to

$$\Phi'(z) = u_x + i v_x = -w_1 + i w_2$$

it follows

$$w = w_1 + i w_2 = -\overline{\Phi'(z)}$$

Our **physical domain** is given by $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ and the related **model domain** is

$$D' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ und } |\operatorname{Re} z| > 1\}$$

The Joukowski–function $f(z)$ given by

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

is a **conformal transformation** from D on D' .

Continuation: plain potential flow.

In the **model plane** we can assume a homogeneous velocity field, i.e. in D' we have

$$W = \text{const.} = (V_\infty, 0)^T$$

since a infinitely flat plate is not interacting with a given homogeneous flow in the direction of the real axis with velocity V_∞ .

For the **velocity potential** $U(W)$ we have the equation

$$\text{grad } U(W) = -(V_\infty, 0)^T$$

and from this follows

$$U(w) = -V_\infty W_1$$

Also there is a **stream function** $V(W)$

$$\text{grad } V(W) = (0, -V_\infty)^T \quad \Rightarrow \quad V(w) = -V_\infty W_2$$

Continuation: plain potential flow.

In the **physical plane** we can assume that

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{grad } \Phi(z) = -v_{\infty}$$

i.e. at infinity the undisturbed flow does not "feel" any obstacle.

Because of the relation

$$\text{grad } \Phi(z) = \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

it follows with

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right)$$

the relation $V_{\infty} = 2Rv_{\infty}$.

For the **complex flow potential** we have

$$\Psi(W) = -2Rv_{\infty}(\text{Re } W + i \text{Im } W)$$

Continuation: plain potential flow.

Now we consider the **back-transformation** in the physical plane, i.e.

$$\Phi(z) = (\Psi \circ f)(z) = -2Rv_\infty(\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z))$$

For the Joukowski-function

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

it is

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} + \frac{Rx}{x^2 + y^2} \right) \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R} - \frac{Ry}{x^2 + y^2} \right)$$

With this in the physical plane we obtain the **velocity potential** $u(z)$

$$u(z) = u(x, y) = -v_\infty \left(x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

Continuation: plain potential flow.

We obtain for the **stream function**

$$v(z) = v(x, y) = -v_\infty \left(y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

The **velocity field** w around the cylinder is given by

$$w = -\nabla u = -v_\infty \left(\frac{(x^2 + y^2)^2 - R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

In particular we have:

- In the two **points** $(-R, 0)$ and $(R, 0)$ the velocity is zero,

$$w(-R, 0) = w(R, 0) = (0, 0)^T$$

- The velocity is **maximal** in the two points $(0, -R)$ and $(0, R)$ with

$$w_{\max} = 2v_\infty$$

Chapter 5. Complex integration

5.1 Examples for complex integration

Definition: A complex valued function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ of a real variable is **integrable**, if real- and imaginary part of f are integrable, and we have:

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$$

The following properties in analogy to the intergration in the real numbers are valid **Linearity**. In addition we have

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Proof: We calculate

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\varphi} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

Complex integration in analogy to curve integrals.

Real analysis: Let $c : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ a piecewise \mathcal{C}^1 -curve, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ and $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ are given. Then we have defined in Analysis II and III the line integrals of scalar and vector fields

$$\int_c f(x) ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}\| dt$$

or

$$\int_c F(x) dx := \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt$$

Definition: Let $D \subset \mathbb{C}$ be a domain, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continuous and $c : [a, b] \rightarrow D$ a piecewise \mathcal{C}^1 -curve. Then

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

is the **complex integral** of $f(z)$ along the curve c .

Properties of the complex integral.

- The value of the complex integral is **independent** of the parameterisation of the curve.
- Changing the **orientation** we have

$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

We denote $(-c)(t) := c(b + t(a - b))$, $0 \leq t \leq 1$.

- **Linearity**

$$\int_c (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- **Additivity** with respect to the path of integration:

$$\int_{c_1+c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$

Additional properties of the complex integral

We have the estimate

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \text{image}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)| dt}_{\text{length of the path } L(c)}$$

Proof We calculate directly

$$\begin{aligned} \left| \int_c f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \end{aligned}$$

An example of complex integration.

Example 1:

Let $f(z) = z$ and $c(t) = re^{it}$ with $0 \leq t \leq 2\pi$. Then we have

$$\begin{aligned}\oint_c z \, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot (rie^{it}) \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt + ir^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Additional examples of complex integration.

Example 2:

Let $f(z) = \bar{z}$ and $c(t) = re^{it}$ with $0 \leq t \leq 2\pi$. then it is

$$\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot (rie^{it}) dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i$$

Example 3:

Let $f(z) = 1/z$ and $c(t) = re^{it}$ with $0 \leq t \leq 2\pi$. Then it is

$$\oint_c \frac{1}{z} dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2} dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z} dz = 2\pi i$$

Example 4: With $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ we have the relation

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{ for } n = -1 \\ 0 & : \text{ for } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Continuation of the last example.

Example 4:

$$\begin{aligned}\oint_c (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (rie^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left(- \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ for } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}\end{aligned}$$

Only for $n = -1$ the integral is not vanishing and we have

$$\oint_c \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Question: Why this?

Uniform convergence and complex integration.

Theorem: Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ be a series of continuous functions, which on a domain $D \subset \mathbb{C}$ **converges uniformly**. Let $c : [a, b] \rightarrow D$ be a piecewise \mathcal{C}^1 -curve, then

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c f_k(z) dz$$

Proof: Since the series of continuous functions converges uniformly also the limit function $f(z)$ is continuous and thus integrable

$$\int_c f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_c f_k(z) dz = \int_c R_n(z) dz$$

Uniform convergence means

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N, z \in D : |R_n(z)| < \varepsilon$$

Continuation of the proof.

From the uniform convergence we conclude

$$\left| \int_c R_n(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

and thus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c R_n(z) dz = 0$$

Example: Let

$$c(t) = re^{it} \quad \text{with } 0 \leq t \leq 2\pi$$

and $|z_0| > r$. Then:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

Note: The point z_0 lies outside the circle $c(t)$.

Continuation of the example.

We calculate directly using the geometric series

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz$$

since it is

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

Due to the uniform convergence it is

$$\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k dz = 0$$

since we can exchange integration and summation.

Anticipation of the Laurent-series.

Example: A series of the form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}_{\text{in analogy to the Taylor-series}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k}_{\text{negativ powers}}$$

is called a **Laurent-serie**.

It is converging locally uniformly and absolutely in the **ring**

$$0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2$$

For $R_1 < r < R_2$ and $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ we have

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}$$

5.2 Der Cauchysche Hauptsatz

Wir hatten im Abschnitt 5.1 mit der Kurve $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Frage: Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

Satz: (Cauchyscher Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein **einfach zusammenhängendes** Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $c : [a, b] \rightarrow G$ eine **geschlossene** stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve, so gilt stets

$$\oint_c f(z) dz = 0$$

Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz.

Alle drei Voraussetzungen sind wichtig und zusammen hinreichend

- ❶ Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist **nicht** holomorph und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz \neq 0$$

- ❷ Das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \neq 0$$

- ❸ Die Kurve $c(t) = e^{(1+i)t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ ist **nicht** geschlossen und es gilt

$$\int_c z dz \neq 0$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

Beweis: Wir setzen $c(t) = (x(t), y(t))^T$ und $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$:

$$\begin{aligned}\oint_c f(z) dz &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x}) dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} dx + i \oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} dx\end{aligned}$$

Bei beiden Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ ist wegen der C.R. DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve** c identisch gleich Null.

Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion.

Korollar: Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f(z)$ holomorph auf G und $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow G$, so folgt aus $c_1(a) = c_2(a)$ und $c_1(b) = c_2(b)$ direkt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz$$

d.h. das Integral $\int_c f(z) dz$ ist **wegunabhängig**.

Satz: (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $G \subset \mathbb{C}$, $f(z)$ holomorph auf G , $z_0 \in G$ ein fester Punkt und setze für $z \in G$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi) d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurve, die z_0 und z verbindet.

Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z)$$

Beweis des letzten Satzes.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) dt\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| \rightarrow 0\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.

Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion.

Korollar: Ist $f(z)$ auf einem **einfach zusammenhängenden** Gebiet G **holomorph** und $F(z)$ eine **Stammfunktion** von $f(z)$, so gilt für alle stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurven $c : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

Beispiel: Wir betrachten mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2}$$

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

also die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.

Insbesondere ist das obenstehende Integral **wegunabhängig**.

Forsetzung des Beispiels.

Direkte Integration: Wir setzen den Integrationsweg

$$c(t) = a + i t, \quad \text{für } -b \leq t \leq b$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z^2} &= \int_{-b}^b \frac{i}{(a + i t)^2} dt = - \frac{1}{a + i t} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{1}{a - i b} - \frac{1}{a + i b} = \frac{2ib}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite berechnet man mit Hilfe der **Stammfunktion**

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z} \right) \Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$

Homotope Kurven.

Definition: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow G$ zwei geschlossene Kurven in G . Man nennt c und \tilde{c} **homotop**, falls eine stetige Abbildung $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ existiert mit

$$\Phi(t, 0) = c(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(t, 1) = \tilde{c}(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(a, s) = \Phi(b, s) \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

Eine geschlossene Kurve c heißt **nullhomotop**, falls sie sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Damit folgt aus dem **Cauchyschen Integralsatz**:

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G . Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und \tilde{c} :

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z) dz = \oint_{\tilde{c}} f(z) dz$$

Beispiel und Definition der Umlaufzahl.

Beispiel: Für jede einfach geschlossene Kurve c , die den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Denn $c(t)$ ist homotop zu $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definition: Für eine geschlossene, stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von c bezüglich des Punktes z_0 .

Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg c den Punkt z_0 in mathematisch positivem Sinne umläuft.

5.3 Die Cauchysche Integralformel, Taylor-Entwicklung

Satz: (Cauchysche Integralformel)

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G , $z_0 \in G$ und $c : [a, b] \rightarrow G \setminus \{z_0\}$ ein zum Punkt z_0 homotoper Weg, der z_0 im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Beweis:

Der Weg c läßt sich innerhalb von $G \setminus \{z_0\}$ auf einen Kreis $K_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

Fortsetzung des Beweises.

Daher gilt

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt\end{aligned}$$

Im Grenzfall $r \rightarrow 0$ erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \longrightarrow 2\pi if(z_0)$$

Da das Integral $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ aber unabhängig von r ist, folgt

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi if(z_0)$$

Bemerkungen zur Cauchyschen Integralformel.

- Für einen beliebigen z_0 -homotopen Weg in $G \setminus \{z_0\}$, der den Punkt z_0 nicht notwendigerweise genau einmal durchläuft, gilt entsprechend

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot \text{Uml}(c, z_0) \cdot f(z_0)$$

- Nützlich ist folgende **heuristische Herleitung**: aus der Taylor-Formel

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

folgt

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1}$$

Formal erhalten wir damit

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_c \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \oint_c \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1} dz}_{=0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

Ein Beispiel zur Cauchyschen Integralformel.

Zu berechnen sei das Integral

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz,$$

wobei c die Achterkurve bezeichnet, die den Punkt $z_1 = i$ einmal im positiven Sinn, den Punkt $z_2 = -i$ einmal im negativen Sinn umläuft.

① Berechnung mittels **Partialbruchzerlegung**

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{1}{1+z^2} dz &= \oint_c \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{i}{2} \oint_c \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \frac{i}{2} \oint_c \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2} \oint_c \frac{dz}{z-i} = \frac{i}{2}(-2\pi i) - \frac{i}{2}(2\pi i) = 2\pi \end{aligned}$$

② Berechnung mittels **Cauchyscher Integralformel**

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{c_1} \left(\frac{1}{z+i} \right) dz + \oint_{c_2} \left(\frac{1}{z-i} \right) dz = 2\pi$$

Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

Korollar 1: (Mittelwerteigenschaft)

Ist $f(z)$ holomorph auf dem Gebiet G , so gilt für $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Korollar 2: (Maximumprinzip)

- 1) Ist $f(z)$ holomorph auf G und besitzt $|f(z)|$ sein Maximum in $z_0 \in G$, dann ist $f(z)$ eine konstante Funktion.
- 2) Ist $f(z)$ stetig auf \overline{G} und holomorph auf G , so nimmt $|f(z)|$ sein Maximum stets auf dem Rand ∂G an.

Korollar 3: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, so besitzt $p(z)$ wenigstens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Wir nehmen an, dass das Polynom keine Nullstelle besitzt. Dann ist die Funktion $f(z) := 1/p(z)$ holomorph auf ganz \mathbb{C} . Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| \end{aligned}$$

Im Grenzfall $z \rightarrow \infty$ erhalten wir also $|f(z)| \rightarrow 0$.

Daher muss $|f(z)|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ das Maximum annehmen und nach dem **Maximumprinzip** folgt $f(z) = \text{const.}$

Demnach ist auch $p(z) = \text{const.} =: \alpha$, aber dann gilt

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = \alpha$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich $a_n = 0$, also einen **Widerspruch**.

Taylor–Entwicklung komplexer Funktionen.

Satz: Ist $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so ist $f(z)$ in jedem Kreis $K_r(z_0) \subset G$ in eine **Potenzreihe** entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } |z - z_0| < r.$$

Den Punkt z_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Insbesondere ist $f(z)$ auf G beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Die **Koeffizienten** a_k der Potenzreihe sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Für den **Konvergenzradius** R der Taylor–Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0 : K_r(z_0) \subset G\}$$

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

Satz: Analog zur Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

gilt für die **Ableitungen** von $f(z)$ die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Beweis: Nach der **Cauchyschen Integralformel** gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta$$

wobei der Kreis $|\zeta - z_0| = r$ **einmal** im positiven Sinn durchlaufen wird.

Fortsetzung des Beweises.

Liegt nun z **innerhalb** dieses Kreises, d.h. $|z - z_0| < r$, so folgt ebenfalls

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der **geometrischen Reihe**

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

Fortsetzung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k$$

und damit kann die Integralformel in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k d\zeta$$

geschrieben werden.

Da die Potenzreihe **gleichmäßig** konvergiert, kann man Summation und Integration **vertauschen**.

Komplettierung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

und ein **Koeffizientenvergleich** in der Potenzreihe ergibt

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

Die Cauchysche Ungleichung.

Satz: Sei $f(z)$ holomorph auf G , $z_0 \in G$, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$. Für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $f(z)$ um z_0 gilt dann die **Abschätzung**

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

Beweis: Aus der **verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

folgt direkt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left(\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \right) \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot M(r) \end{aligned}$$

Der Satz von Liouville.

Satz: Ist $f(z)$ holomorph und beschränkt auf \mathbb{C} , so ist $f(z)$ konstant.

Beweis: Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert $r \rightarrow \infty$

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \geq 1$$

Damit ist auch $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \text{const.}$

Kapitel 5. Komplexe Integration

5.4 Singularitäten und Residuen

Satz: (Laurent-Entwicklung)

Sei $f(z)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq R_1 < R_2$ mit

$$K_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subset G$$

Dann ist $f(z)$ auf $K_{R_1, R_2}(z_0)$ in eine **Laurent-Reihe** mit **Entwicklungspunkt** z_0 entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für die Koeffizienten gilt mit $R_1 < \rho < R_2$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Laurent-Entwicklung.

Weiterhin gilt: Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes $K_{r,R}(z_0)$, der noch innerhalb von G liegt, in jedem kleineren **kompakten** Kreisring $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)}$ ist die Konvergenz **absolut** und **gleichmäßig**.

Beweis des Satzes: Gegeben sei ein Kreisring $K_{r,R}(z_0) \subset G$ mit $R_1 < r < R < R_2$ und den beiden Rändern

$$c_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c_R(t) := z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Behauptung: Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt $z \in K_{r,R}(z_0)$ die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Fortsetzung des Beweises.

Seien dazu die beiden Kurven c_1 und c_2 definiert wie an der [Tafel](#) angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0\end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale entlang c_R und c_r eine [Reihendarstellung](#) herzuleiten.

Sei zunächst ζ ein Punkt auf c_R , also $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{CR} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{CR} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Sei nun ζ ein Punkt auf c_r , d.h. $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \quad \text{mit } m = -(k + 1) \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Einsetzen in das Kurvenintegral über c_r ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \leq |z - z_0| \leq R$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

gegeben sind.

Komplettierung des Beweises.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges $\rho \in [r, R]$.

Bemerkung:

- Die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ ist bei vorgegebenem Kreisring **eindeutig** bestimmt.
- Ist $f(z)$ holomorph im gesamten Kreis $\overline{K_{R_2}(z_0)}$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für $k = -1, -2, -3, \dots$ die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die **Laurent-Entwicklung** stimmt dann mit der **Taylor-Entwicklung** überein.

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit **Entwicklungspunkt** $z_0 = 0$ und **Kreisring** $0 < |z| < \infty$.

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erhalten wir die **Laurent-Reihe**

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Der Nenner hat **zwei Nullstellen** in $z = -1$ und $z = 2$. Es existieren daher **drei Laurent-Entwicklungen**, nämlich in $|z| < 1$, in $1 < |z| < 2$, und in $|z| > 2$.

Für den Kreisring $1 < |z| < 2$ gilt etwa:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{3} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k \end{aligned}$$

Isolierte Singularitäten.

Definition: Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G . Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singularität** von $f(z)$, falls ein $r > 0$ existiert mit $K_{0,r}(z_0) \subset G$.

Ist $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung in $K_{0,r}(z_0)$, so nennt man den Punkt z_0

- 1) eine **hebbare Singularität**, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$ gilt,
- 2) einen **Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$** , falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall k < -m : a_k = 0$$

- 3) eine **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$ gilt.

Einige Beispiele.

- ❶ Der Punkt $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor-Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

- ❷ Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1.

- ❸ Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

Ein weiteres Beispiel: Rationale Funktionen.

Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von $q(x)$. Ist nun z_0 eine m -fache Nullstelle von $q(z)$, so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z), r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei g holomorph in z_0 ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h. z_0 ist ein **Pol** der Ordnung $\leq m$ oder eine **hebbare Singularität**, falls $a_0 = a_1 = \dots a_{m-1} = 0$.

Klassifikation von Singularitäten.

Satz:

- a) Ist z_0 eine **hebbare** Singularität, so existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & : z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von $f(z)$.

- b) Ist $f(z)$ in einer Umgebung von z_0 **beschränkt**, so ist z_0 eine hebbare Singularität.
- c) Ist z_0 ein **Pol** von $f(z)$, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

- d) Ist z_0 eine **wesentliche** Singularität von $f(z)$, so bildet $f(z)$ jeden Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ auf \mathbb{C} oder $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ab.

5.5 Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

Definition: Besitzt die Funktion $f(z)$ bei z_0 die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) := \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von $f(z)$ zum Entwicklungspunkt z_0 .

Satz: Ist $r(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind z_1, \dots, z_m die (verschiedenen) Nullstellen von $q(z)$, so gilt

$$r(z) = h(z; z_1) + \dots + h(z; z_m)$$

Beweis des letzten Satzes.

Idee: Wir zeigen, dass die Funktion $g(z)$ definiert durch

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j)$$

beschränkt und auf ganz \mathbb{C} holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass $g(z)$ konstant ist. Mit $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist $g(z)$ holomorph auf dem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten z_1, \dots, z_m verschwinden identisch.

Demnach sind die Punkte z_1, \dots, z_m hebbare Singularitäten und $g(z)$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} . Wegen $\text{grad } p < \text{grad } q$ folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$$

Fortsetzung des Beweises.

Also ist $g(z)$ beschränkt und holomorph auf ganz \mathbb{C} . Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const}$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für $z \rightarrow \infty$ folgt

$$g(z) = 0$$

Anwendung des Satzes: Die [Partialbruchzerlegung](#) einer komplexen rationalen Funktion kann über die [Hauptteile](#) der Laurent-Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die [Singularitäten](#) der rationalen Funktion sind.

Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung.

Man bestimme die **Partialbruchzerlegung** der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)}$$

Der Nenner besitzt die beiden **Nullstellen** $z = -1$ und $z = 1$. Wir bestimmen daher die **Hauptteile** der Laurent-Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für $z = -1$ schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)}$$

Nun ist $g(z)$ in einer Umgebung des Punktes $z = -1$ **holomorph** und kann in eine **Taylor-Reihe** entwickelt werden. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot (-2 - (z+1) + O((z+1)^2))$$

Fortsetzung des Beispiels.

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z;-1)} + \dots$$

2) Analog schreiben wir für den Punkt $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)}$$

und erhalten durch **Taylor-Entwicklung**

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot (1 - (z-1) + O((z-1)^2)) = \frac{1}{\underbrace{z-1}_{h(z;-1)}} - 1 + \dots$$

Demnach ist die **komplexe Partialbruchzerlegung** von $f(z)$ gegeben durch

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$$

Der Residuensatz.

Definition: Ist z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Laurent-Entwicklung zum Punkt z_0 , d.h.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r$$

Man nennt dann

$$\text{Res}(f; z_0) := a_{-1}$$

das **Residuum** von $f(z)$ in z_0 .

Satz: Sei G ein Gebiet, $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, c eine geschlossene, stückweise C^1 -Kurve in $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, die in G nullhomotop ist, d.h. innerhalb von c liegen höchstens die isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_m .

Dann gilt

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \cdot \text{Res}(f; z_k)$$

Beweisskizze zum Residuensatz.

- 1) Zunächst genügt es, nur die Singularitäten zu betrachten, die **innerhalb** von c liegen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.
- 2) Man zerlegt c in geschlossene Kurven c_1, \dots, c_s , sodass jede dieser Kurven c_j nur **Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl** l_j enthält.
- 3) Jede Kurve c_j ist innerhalb von $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ homotop zu einer **l_j -fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve** \tilde{c}_j . Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{j=1}^s \oint_{c_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^s l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z) dz$$

- 4) Jeder **einfach geschlossene Weg** \tilde{c}_j kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von \tilde{c}_j zerlegt werden. Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz$$

Fortsetzung der Beweisskizze zum Residuensatz.

Mit der **Laurent-Entwicklung** um z_k gilt aber

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz &= \oint_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j dz \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j dz \\ &= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_k)\end{aligned}$$

Für die Kurve an der **Tafel** erhält man also

$$\begin{aligned}\oint_c f(z) dz &= 2\pi i \cdot [2\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2) \\ &\quad + \text{Res}(f; z_3) + 2\text{Res}(f; z_4) + 2\text{Res}(f; z_5)]\end{aligned}$$

Methoden zur Berechnung von Residuen.

Satz:

- a) Ist z_0 ein **einfacher Pol** von $f(z)$, so besitzt $f(z)$ eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion $g(z)$. Für das Residuum gilt dann

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

- b) Ist $f(z) = p(z)/q(z)$ mit auch in z_0 holomorphen Funktionen p und q eine rationale Funktion und z_0 eine **einfache Nullstelle** von $q(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- c) Gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, $m \geq 1$ mit einer in einer Umgebung von z_0 holomorphen Funktion $g(z)$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Beweis des letzten Satzes.

Wie man leicht sieht, ist Teil a) ein **Spezialfall** von Teil c).

Weiterhin kann Teil c) über eine **Taylor-Entwicklung** bewiesen werden, da $g(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist.

Wir schreiben zunächst

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$$

Daraus kann man direkt das **Residuum** ablesen und es gilt

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}(f; z_0)$$

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 **holomorph fortsetzbar** mit $r(z_0) \neq 0$.

Fortsetzung des Beweises.

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist $r(z)$ im Punkt z_0 holomorph fortsetzbar mit $r(z_0) \neq 0$.

Damit ist die Funktion

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

bei $z = z_0$ holomorph und wir erhalten für $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil a) folgt wegen

$$q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$$

gerade

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Drei Beispiele zur Berechnung von Residuen.

Beispiel 1: Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil a) des letzten Satzes

$$\operatorname{Res}(f; -1) = \left. \frac{1}{z-2} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \left. \frac{1}{z+1} \right|_{z=2} = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2: Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt nach b)

$$\operatorname{Res}(f; i) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f; -i) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}$$

Drei Beispiele zur Berechnung von Residuen.

Beispiel 3: Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$$

hat bei $z_0 = i$ einen **Pol zweiter Ordnung**. Nach dem letzten Satz, Teil c), gilt

$$\operatorname{Res}(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion $g(z)$ aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

durch

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist.

Kapitel 5. Komplexe Integration

5.6 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Satz: Sei $r(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf \mathbb{R} besitzt, und es gelte

$$\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$$

Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(r; z)$$

Beweis: Wegen $\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$ existiert nach dem [Majorantenkriterium](#) das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für $x \gg 1$ gilt

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{c}{x^2}$$

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve (siehe Tafel).

Fortsetzung des Beweises.

Ist r hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten z_k von $r(z)$ mit strikt positivem Imaginärteil **innerhalb** der Kurve $c_1 + c_2$.

Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(r; z_k) = \oint_{c_1 + c_2} r(z) dz = \int_{c_1} r(z) dz + \int_{c_2} r(z) dz$$

Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z) dz = \int_{-r}^r r(z) dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(z) dz \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Weiter berechnet man

$$\left| \int_{c_2} r(z) dz \right| \leq \max_{|z|=r} |r(z)| \cdot \pi r \leq \pi r \frac{c}{r^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.

Beispiel.

Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Die Funktion $r(z) = 1/(1+z^6)$ besitzt sechs **Polstellen**, von denen drei in der **oberen Halbebene** liegen, nämlich $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Ferner gilt

$$\text{Res}(r; z_k) = \frac{1}{6z^5} \Big|_{z=z_k} = -\frac{z_k}{6}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} &= 2\pi i \left(-\frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6} e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \left(2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right) \end{aligned}$$

Beispiel.

Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx \quad \text{mit } a > 0, \omega > 0$$

Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left| \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{c}{|z|^2} \quad \text{für } y \geq 0$$

entlang des Weges c_2 , gilt die Aussage [analog](#).

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; z_k \right) = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; ia \right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{i\omega z}}{2z} \Big|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a} \end{aligned}$$

Weitere Anwendungen.

Satz: Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$.

Gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, y \geq 0} f(z) = 0,$$

so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}; z_k)$$

Beispiel: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$

Weitere Anwendungen.

Satz: Sei $r(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen in $0 \leq x < \infty$ und es gelte $\text{grad } q > \text{grad } p$. Für $0 < \alpha < 1$ gilt dann

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^{\alpha}} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \text{Res} \left(\frac{r(z)}{z^{\alpha}}; z_k \right)$$

Dabei ist folgender Zweig von z^{α} zu wählen

$$z = re^{i\phi} \quad \text{mit } 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^{\alpha} = r^{\alpha} e^{i\alpha\phi}$$

Beispiel: Man berechnet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Kapitel 6. Die Fourier–Transformation

Wiederholung aus Analysis II: Fourier–Reihenentwicklung

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische, stückweise stetige Funktion.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(k\omega\tau) d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(k\omega\tau) d\tau$$

Reelle Darstellung der Fourier–Entwicklung von f mit $\omega = 2\pi/T$.

Konvergenzsatz zur Fourier-Entwicklung.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch, stückweise stetig differenzierbar und betrachte die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

Dann gilt:

- a) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

- b) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad \gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau$$

Die Fourier–Transformierte und das Fourier–Integral.

Betrachte jetzt den formalen Grenzwert $T \rightarrow \infty$, um eine Fourier–Entwicklung für nicht–periodische Funktionen zu erhalten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right) \Delta\omega$$

Riemannsche Summe mit $\Delta\omega := \omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/T$.

Definition: Die Funktion $F(\omega)$ gegeben durch

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

heißt die **Fourier–Transformierte** oder **Spektralfunktion** von $f(t)$. Die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

nennt man das **Fourier–Integral** oder **Spektrale Zerlegung** von $f(t)$.

Diskretes und kontinuierliches Spektrum.

Bemerkung:

- Die Fourierkoeffizienten $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ einer periodischen Funktion $f(t)$ bilden das **diskrete Spektrum** von f .
- Die Fourier–Transformation $(F(\omega))_{\omega \in \mathbb{R}}$ einer nicht–periodischen Funktion liefert das **kontinuierliche Spektrum**.

Andere Schreibweisen:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier–Transformation und inverse Fourier–Transformation.

Reelle Darstellung der Fourier–Transformation.

Bemerkung: Durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil erhält man die **reelle Darstellung** der Fourier–Transformation

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau) \right) d\tau \\ &= a(\omega) - ib(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (\text{gerade Funktion})$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (\text{ungerade Funktion})$$

Entsprechend gilt folgende reelle Darstellung des Fourier–Integrals.

Reelle Darstellung des Fourier-Integrals.

Dann gilt auch die folgende Darstellung des Fourier-Integrals

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(\omega) - ib(\omega)) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \end{aligned}$$

Zusammenfassung: (Sinus-, Cosinus-Spektrum)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau$$

Beispiel: Fourier–Transformierte des Rechteckimpulses.

Wir betrachten den **Rechteckimpuls** der Form

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -a \leq t \leq a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & : \omega \neq 0 \\ 2a & : \omega = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Für die Umkehrung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t))}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a-t))}{\omega} d\omega\end{aligned}$$

Dies sind sogenannte **Dirichlet-Integrale** der Form

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

und man verwendet zur Berechnung den **Residuensatz**.

Komplettierung des Beispiels.

Es folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} \pi & : \alpha > 0 \\ 0 & : \alpha = 0 \\ -\pi & : \alpha < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Umkehrung in der Form

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1 & : |t| < a \\ \frac{1}{2} & : t = a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$

Bemerkung:

Man beachte insbesondere die [Mittelwerteigenschaft](#)

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit $a > 0$ die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned}$$

Umkehrung wieder mit Hilfe des [Residuensatzes](#)

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

und $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$.

Fortsetzung des Beispiels.

Konkrete Berechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ia} d\omega \\ &= \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z - ia}; z_k \right) \\ &= \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit $a > 0$ die Funktion

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten.

Satz:

- a) Ist $f(t)$ stückweise stetig und absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, so existiert die Fourier-Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Das Integral konvergiert gleichmäßig und $F(\omega)$ ist stetig.

- b) Ist $f(t)$ eine stückweise C^1 -Funktion und absolut integrierbar, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \left(f(t^-) + f(t^+) \right) = \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} d\omega$$

- c) Sind f_1, f_2 wie in b) mit $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$, so folgt $f_1(t) = f_2(t)$ in allen Punkten t , in denen f_1 und f_2 stetig sind.

Rechenregeln der Fourier–Transformation.

Im Folgenden seien $f, g, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Mit $F(\omega), G(\omega), \dots$ bezeichnen wir die entsprechenden Fourier–Transformierten.

- Linearität

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

- Konjugation

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{F(-\omega)}$$

denn

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt}$$

- Streckung

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

Rechenregeln der Fourier–Transformation.

- Streckung

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t} dt &= \operatorname{sgn}(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega \frac{\tau}{c}} \frac{1}{c} d\tau \\ &= \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{c}\tau} d\tau \end{aligned}$$

- Verschiebungssätze

$$\mathcal{F}[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = F(\omega - a)$$

Folgt durch direktes Einsetzen

Rechenregeln der Fourier–Transformation.

- **Faltungssatz**

Man nennt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

die **Faltung** der Funktionen f und g . Es gilt

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= F(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot G(\omega) \end{aligned}$$

Ein Beispiel für den Faltungssatz.

Für die Faltung $g = f * f$ des **Rechteck-Impulses**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$$

gilt

$$g(t) = \int_{-1}^1 f(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 2 - |t| & : -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & : |t| > 2 \end{cases}$$

Nach dem **Faltungssatz** folgt mit dem vorherigen Beispiel direkt

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \omega & : \omega \neq 0 \\ 4 & : \omega = 0 \end{cases}$$

Rechenregeln der Fourier–Transformation.

- **Differentiation**

Ist $f(t)$ eine stückweise \mathcal{C}^1 –Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen τ_1, \dots, τ_m und sind $f(t)$, $f'(t)$ absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^m \left(f(\tau_k^+) - f(\tau_k^-) \right) e^{-i\omega\tau_k}$$

Beweis mittels partieller Integration.

Ist $f(t)$ sogar stetig, so folgt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega)$$

und unter entsprechenden Voraussetzungen gilt sogar

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r F(\omega)$$

Wesentliche Eigenschaft zum Einsatz der Fourier–Transformation bei Differentialgleichungen.

Beispiel.

Wir betrachten die **gewöhnliche Differentialgleichung**

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Man berechnet nun die **Fourier–Transformation** der Differentialgleichung

$$\mathcal{F}[y](\omega) = Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y'](\omega) = -i\omega Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y''](\omega) = -\omega^2 Y(\omega)$$

Die Fourier–Transformation der Differentialgleichung lautet damit

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die **Fourier-Transformation** der Differentialgleichung lautet damit

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

und es ergibt sich

$$Y(\omega) = \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b}$$

Nach **Rücktransformation** ergibt sich

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega t} d\omega$$

und damit

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

Anwendung der Fourier–Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Eine Fourier–Transformation bezüglich der **x–Variablen** liefert

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

Damit folgt für die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t = (i\omega)^2 U, \quad \text{für } t > 0, \omega \in \mathbb{R}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ω .

Anwendung der Fourier-Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Daraus folgt

$$U(\omega, t) = U(\omega, 0)e^{-\omega^2 t} \quad \text{mit} \quad U(\omega, 0) = U_0(\omega)$$

und damit

$$U(\omega, t) = U_0(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

Rücktransformation: Mit der gegebenen Anfangsbedingung haben wir die Beziehung

$$\mathcal{F}^{-1}[U_0] = u_0(x)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2 t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Anwendung der Fourier–Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Aus dem Faltungssatz folgt dann

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U_0 e^{-\omega^2 t}] = u_0 * \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi\end{aligned}$$

Weiteres Beispiel: Potentialproblem für die Halbebene

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fourier–Transformation bezüglich x (bei festem y) liefert die **Poissonsche Integralformel** für die Halbebene

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi$$

Ende der Vorlesung.